Das Randverhalten der Bergmanschen Kernfunktion und Metrik in streng pseudo-konvexen Gebieten

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Klas Diederich
aus Wuppertal

Göttingen 1967

Das Randverhalten der Bergmanschen Kernfunktion und Metrik in streng pseudo-konvexen Gebieten

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Klas Diederich
aus Wuppertal

Göttingen 1967

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7

Referent: Prof.Dr. H. Grauert
Korreferent: Prof.Dr. E. Heinz

Tag der mündlichen Prüfung: 28.7.1967

Inhaltsverzeichnis

		Seite
Einleitung		I - III
§ 1.	Vorbereitungen	1
§ 2.	Konstruktion einer holomorphen Hilfsfunktion	11
§ 3.	Ein Approximationssatz für holomorphe Funktionen	14
§ 4.	Die Kernfunktion und die benötigten Minima in analytischen Ellipsoiden	26
§ 5.	Eine Transformationsformel für $J_B(X_o,X_1)(t)$	32
§ 6.	Lokale obere Abschätzungen	36
§ 7.	Zurückführung auf lokale Probleme	4o
§ 8.	Das Randverhalten der Kernfunktion, der Metrik und der Grösse $J_G(0,1)(t)$ in streng pseudo-konvexen Gebieten	44
§ 9.	Das Randverhalten von $\frac{\partial K_G}{\partial z_1}(t;\overline{t})$	5o
§ 1o.	Anhang	57
Literaturverzeichnis		6o

Einleitung

Die in dieser Arbeit betrachtete Kernfunktion wurde 1922 zum ersten Mal von St. Bergman untersucht. (vgl. [2]). Man erhält sie als reproduzierenden Kern $K_B(z;\bar{\zeta})$ im Hilbertraum H(B) der über einem beschränkten Gebiet $B \subset \mathbb{C}^n$ 2- integrierbaren holomorphen Funktionen (integriert wird bez. des euklidischen Volumenelementes $d\omega$) (vgl. [1], [9]). St. Bergman hat die Theorie dieser Kernfunktion in mehreren Arbeiten dargestellt. Eine Übersicht über die Ergebnisse und Anwendungen in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen findet man in [5], [6] sowie in [7]. -

Besondere Bedeutung gewinnt die Bergmansche Kernfunktion durch die Tatsache, dass $\log K_B(z;\bar{z})$ Potentialfunktion einer gegenüber biholomorphen Abbildungen invarianten positiv-definiten Kählerschen Metrik ds^2_B ist. Die reell analytische Funktion $K_B(z;\bar{z})$ ist insbesondere über B streng pluri-subharmonisch.

Die Frage nach dem Verhalten von $K_B(z;\bar{z})$, sowie einiger daraus abgeleiteter Grössen bei Annäherung an den Rand von B stellte Bergman in [3] für den Fall beschränkter Gebiete im $\mathbb{C}^2$. Es zeigt sich schon bei der Betrachtung einfacher Gebiete, für die sich die Kernfunktion berechnen lässt, dass das Randverhalten sehr verschieden sein kann. So geht die Kernfunktion der Hyperkugel im $\mathbb{C}^2$ am Rande mit 3. Ordnung gegen Unendlich, nähert man sich dagegen im Dizylinder $\{(z_1,z_2) : |z_\nu| < 1\}$ einem inneren Punkt einer der Randflächen $|z_1| = 1$ bzw. $|z_2| = 1$, so geht dessen Kernfunktion mit der Ordnung 2 gegen Unendlich; in den Kanten $\{(z_1,z_2) : |z_\nu| = 1\}$ geht die Kernfunktion sogar von der Ordnung 4 gegen Unendlich. (Von den dabei notwendigen Einschränkungen, die für die gegen den Rand strebenden Folgen gemacht werden müssen, wurde hier abgesehen). Unter diesen Beispielen zeichnet die Hyperkugel

die Tatsache aus, dass sie streng pseudo-konvex ist. Es ist nun die Frage, ob sich die Kernfunktion in beliebigen streng pseudo-konvexen Gebieten am Rande ebenso verhält wie in der Hyperkugel. Bergman bewies in diesem Zusammenhang den folgenden

Satz: $B \subset \mathbb{C}^2$ sei ein beschränktes Gebiet, in $0 \in \partial B$ sei ∂B streng pseudo-konvex, 2mal stetig differenzierbar und glatt. Der Rand ∂B sei in einer Umgebung von 0 in der Form

$$2x_1 = a y_1^2 + \sigma \cdot |z_2|^2 + \psi_3(y_1, z_2, \bar{z}_2) \qquad (1)$$

mit $\psi_3 = o(y_1^2 + |z_2|^2)$ u. $z_1 = x_1 + iy_1$, $a, \sigma \in \mathbb{R}$ darstellbar. (Es ist $\sigma > 0$). B_2 sei die Projektion von B auf die Ebene $z_1 = 0$. Es gebe eine in B_2 holomorphe Funktion $h(z_2)$ mit $h(0) = 0$ und $h'(0) \neq 0$, so dass

$$\{(z_1, z_2) : z_1 = h(z_2),\ z_2 \in B_2\} \cap \overline{B} = \{0\} \qquad (2)$$

Dann gilt

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ R}} (z_1 + \bar{z}_1)^3 K_B(z;\bar{z}) = \frac{2}{\pi^2}\sigma \; ; \quad \lim_{\substack{z \to 0 \\ R}} (z_1+\bar{z}_1)^4 \frac{\partial K_B}{\partial z_1}(z;\bar{z}) = -\frac{6\sigma}{\pi^2}$$

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ R}} (z_1+\bar{z}_1)^4 \frac{\partial K}{\partial z_2}(z;\bar{z}) = 0 \; ; \quad \lim_{\substack{z \to 0 \\ R}} (z_1+\bar{z}_1)^2 \, ds_B^2 = 3 \cdot |dz_1|^2$$

(Zur Bedeutung von $\lim_{\substack{z \to 0 \\ R}}$ .. siehe § 1,5)

Die Bergmanschen Beweismethoden sind geometrischer Art. Es werden sogenannte innere und äussere Vergleichskörper zu B konstruiert; das sind Gebiete, deren Kernfunktion direkt berechnet werden kann, die in B liegen bzw. B umfassen und deren Ränder sich in 0 "gut an ∂B anschmiegen". Dabei macht die Konstruktion der äusseren Vergleichskörper die starken zusätzlichen Voraussetzungen (1) und (2) erforderlich.

Ziel dieser Arbeit ist es, das Randverhalten der im obigen Satz betrachteten Grössen in streng pseudo-konvexen Gebieten im $\mathbb{C}^n$ (in glatten Randpunkten) zu beschreiben. Das geschieht in den Theoremen 8.2 und 9.5 Die Beweismethode stützt sich wie bei Bergman darauf, dass alle untersuchten Grössen sich durch Minima der Normquadrate von gewissen Teilmengen des Hilbertraumes H(B) charakterisieren lassen und dass diese Minima monoton wachsend von den Gebieten B abhängen. Es werden jedoch die geometrischen Konstruktionen Bergmans vermieden. Ein in § 3 bewiesener Approximationssatz für holomorphe 2-integrierbare Funktionen erlaubt es stattdessen, das Problem zu lokalisieren, d.h. auf die Untersuchung sehr kleiner Gebiete mit einem streng pseudo-konvexen Randpunkt zu reduzieren. Dabei ist die im § 2 konstruierte holomorphe Hilfsfunktion von Wichtigkeit.

Soweit Theorem 8.2 die Kernfunktion selber betrifft, wurde es bereits von Hörmander in [13] mit Methoden der partiellen Differentialoperatoren gewonnen. Dabei reduziert auch Hörmander durch einen Approximationssatz auf lokale Untersuchungen. Insofern ist die hier benutzte Methode ähnlich wie die in [13]. Jedoch werden hier nur funktionentheoretische Hilfsmittel gebraucht.

Wegen allgemeinerer Untersuchungen über die Fortsetzbarkeit der Kernfunktion K_B und der Metrik ds^2_B über B hinaus sei noch auf die Arbeit [16] von Sommer und Mehring verwiesen.

Herrn Professor H. Grauert möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und die Förderung, die er ihr zuteil werden liess, herzlich danken.

§ 1. Vorbereitungen

Es werden hier zunächst einige Bezeichnungen eingeführt sowie die grundlegenden Definitionen und Sätze aus der Theorie der Bergmannschen Kernfunktion gebracht, die im folgenden benötigt werden. Auf Beweise wird dabei verzichtet. Wegen einer ausführlichen Darstellung der Bermannschen Theorie wird auf [5], [6], [15] sowie [9] verwiesen.

Die in der Arbeit betrachteten Bereiche (= offene Mengen) liegen sämtlich im Raum $\mathbb{C}^n = z = (z_1,\ldots,z_n)$ von n komplexen Veränderlichen, $n \geq 2$. Für $z \in \mathbb{C}^n$ wird die Maximumnorm von z durch

$$|z| = \max_{j=1,\ldots,n} |z_j|$$

bezeichnet. Unter $||z||$ wird die euklidische Norm von z

$$||z|| = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right)^{1/2}$$

verstanden. Umgebungen sind grundsätzlich offene Mengen. -

Ist $M \subset \mathbb{C}^n$ irgendeine Teilmenge und f eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion auf M, so ist

$$\infty \geq |f|_M := \sup \left\{ |f(z)|,\ z \in M \right\}.$$

Mit $d\omega$ bzw. $d\omega_z$, wenn die Bezeichnung der Variablen zusätzlich angegeben werden soll, wird das euklidische Volumenelement im $\mathbb{C}^n$ bezeichnet. Ist $B \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränkter Bereich, dann sei $V(B) := \int_B d\omega$ das euklidische Volumen von B. - Für die μ-te partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z_\mu}$ einer in B holomorphen Funktion f wird kurz f_μ geschrieben, $\mu = 1,\ldots,n$.

2. $B \subset \mathbb{C}^n$ sei ein beschränkter Bereich. In der Bergmannschen Theorie der Kernfunktion betrachtet man den Raum H(B) aller über B holomorphen, quadratintegrierbaren Funktionen:

$$H(B) := \left\{ f \text{ holomorph über } B: \int_B |f|^2 d\omega < \infty \right\}$$

H(B) enthält offenbar alle Polynome. Führt man durch

$$(f,g)_B := \int_B f \cdot \bar{g}\, d\omega \text{ für alle } f,g \in H(B)$$

in H(B) ein Skalarprodukt ein, so ist H(B) ein Hilbertraum abzählbar unendlicher Dimension. Die Norm von $f \in H(B)$ werde durch $\| f \|_B$, oder kurz $\| f \|$, bezeichnet. Eine einfache Abschätzung liefert für alle $f \in H(B)$ und $t \in B$

$$|f(t)| \leq \frac{(\sqrt{n})^n}{(\sqrt{\pi}\, d)^n} \| f \|_B \qquad (1)$$

Dabei ist d der euklidische Randabstand von t in B. (1) hat eine wichtige Konsequenz. Ist nämlich $F \subset H(B)$ eine Menge von Funktionen mit gleichmässig beschränkter Norm, das heisst $\| f \|_B \leq L$ für alle $f \in F$, so ist F wegen (1) eine im Inneren von B gleichmässig beschränkte Familie holomorpher Funktionen. F ist dann also normal. - Eine weitere Konsequenz aus (1) ist die Existenz der Bergmannschen Kernfunktion $K_B(z; \bar{\zeta})$ zu H(B) (vgl. etwa [9], Satz 2.3). $K_B(z; \bar{\zeta})$ ist über $(z, \zeta) \in B \times B$ erklärt, in z holomorph und in ζ antiholomorph. Für alle $\zeta \in B$ ist $K_B(z; \bar{\zeta}) \in H(B)$ als Funktion von z. Ist $\{ \varphi_\nu(z), \nu = 1,2,\ldots \}$ ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem von H(B), so gilt

$$K_B(z; \bar{\zeta}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z)\, \overline{\varphi_\nu(\zeta)} \qquad (2)$$

Die Reihe ist im Inneren von $B \times B$ gleichmässig konvergent. Es folgt, dass $K_B(z; \bar{\zeta}) = \overline{K_B(\zeta; \bar{z})}$ in $B \times B$ gilt,

und da es offenbar zu jedem $t \in B$ ein $f \in H(B)$ gibt mit $f(t) \neq 0$, ergibt sich $K_B(t;\bar{t}) > 0$ in B.

Nun sei $\phi : B \to B'$ mit $w = \phi(z)$ eine biholomorphe Abbildung auf den (beschränkten) Bereich $B' \subset \mathbb{C}^n(w)$. Durch ϕ wird in folgender Weise eine Abbildung ϕ^* von H(B') in H(B) induziert:

$$\phi^* : H(B') \ni g \to f := g \circ \phi \cdot \frac{\partial(w)}{\partial(z)} \in H(B) \qquad (3)$$

($\frac{\partial(w)}{\partial(z)}$ ist die Funktionaldeterminante von ϕ). Man überlegt sich leicht, dass gilt:

Satz: ϕ^* ist ein isometrischer Isomorphismus von H(B') auf H(B) .

Daraus folgt mit (2) das Transformationsverhalten von $K_B(z;\bar{\zeta})$:

$$K_B(z;\bar{\zeta}) = K_{B'}(\phi(z), \overline{\phi(\zeta)}) \cdot \frac{\partial(w)}{\partial(z)}(z) \cdot \overline{\left(\frac{\partial(w)}{\partial(z)}(\zeta)\right)} \qquad (4)$$

Es sei $t \in B$ beliebig. $K_B(t;\bar{t})$ lässt sich auch folgendermassen charakterisieren:

$$K_B^{-1}(t;\bar{t}) = \min \left\{ \|f\|_B^2 : f \in H(B),\ f(t) = 1 \right\} \qquad (5)$$

Das Minimum wird angenommen, und zwar durch die Funktion

$$f_0(z) := \frac{K_B(z;\bar{t})}{K_B(t;\bar{t})} \in H(B)$$

Eine einfache Umformung von (5) liefert

$$K_B(t;\bar{t}) = \max \left\{ |f(t)|^2 : f \in H(B),\ \|f\|_B \leq 1 \right\} \qquad (6)$$

Diese Darstellung von $K_B(t;\bar{t})$ als Minimum bzw. Maximum ist charakteristisch für die Bergmansche Theorie und ist auch in den folgenden Untersuchungen über das

Randverhalten ein wesentliches Hilfsmittel. Es werden alle Grössen, die betrachtet werden, auf Minima des Normquadrates unter geeigneten Nebenbedingungen zurückgeführt.

Aus (5) ergibt sich insbesondere leicht die Monotonie der Kernfunktion als Gebietsfunktional; es sei $t \in B' \subset B$, dann gilt:

$$K_B(t;\bar{t}) \leq K_{B'}(t;\bar{t}) \tag{7}$$

Als ein später benötigtes Beispiel sei die Kernfunktion der Hyperkugel

$$G_K = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \|z\|^2 < r^2 \right\}$$

angegeben:

$$K_{G_K}(z;\bar{\zeta}) = \frac{n!\, r^2}{\pi^n (r^2 - \sum_{\mu=1}^{n} z_\mu \bar{\zeta}_\mu)^{n+1}} \tag{8}$$

3. Die Kernfunktion $K_B(z;\bar{z})$ definiert auf B eine positiv definite, hermitesche Metrik ds_B^2, die sogenannte Bergmansche Metrik, indem man setzt

$$ds_B^2(z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 \log K_B}{\partial z_\nu \, \partial \bar{z}_\mu} (z,\bar{z}) \cdot dz_\nu \cdot d\bar{z}_\mu \tag{9}$$

Diese Metrik ist invariant gegenüber biholomorphen Abbildungen. Sie kann folgendermassen durch ein Minimalproblem charakterisiert werden. Es sei $u = (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ beliebig. Man setze

$$ds_B^2(z;u) := \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 \log K_B}{\partial z_\nu \, \partial \bar{z}_\mu} (z;\bar{z}) \cdot u_\nu \cdot \bar{u}_\mu \tag{10}$$

Ausserdem sei für $t \in B$

$$E'_B(t,u) := \left\{ f \in H(B) : f(t) = 0, \sum_{\mu=1}^{n} f_\mu(t)\, u_\mu = 1 \right\}$$

und

$$J'_B(t,u) := \min \left\{ \|f\|^2 : f \in E'_B(t,u) \right\} \qquad (11)$$

Dann ist $E'_B(t,u) \neq \emptyset$, das Minimum wird angenommen und es gilt:

$$J'_B(t,u) = \frac{1}{K_B(t;\bar{t})\, ds_B^2(t;u)} \qquad (12)$$

(vgl. etwa [9]. III(23)).

Aus (11) und (12) folgt für $t \in B' \subset B$

$$K_B(t;\bar{t})\, ds_B^2(t,u) \leq K_{B'}(t;\bar{t})\, ds_{B'}^2(t;u) \qquad (13)$$

Für $ds_B^2(t;u)$ selber lässt sich diese Monotonie nicht beweisen. - (11) kann umgeformt werden zu

$$K_B(t;\bar{t})\, ds_B^2(t;u) = \max \left\{ \left| \sum_{\mu=1}^{n} f_\mu(t)\, u_\mu \right|^2 : f \in H(B), \right.$$
$$\left. \|f\|_B \leq 1,\ f(t) = 0 \right\} \qquad (14)$$

4. Auch $\frac{\partial K_B}{\partial z_1}(t;\bar{t})$ muss auf ein Minimalproblem zurückgeführt werden, damit sein Randverhalten mit den hier benutzten Methoden beschrieben werden kann. - Dazu seien $X_0, X_1 \in \mathbb{C}$ beliebig und $t \in B$,

$$E_B(X_0,X_1;t) := \left\{ f \in H(B) : f(t) = X_0,\ f_1(t) = X_1 \right\}$$

$$J_B(X_0,X_1)(t) := \min \left\{ \|f\|_B^2 : f \in E_B(X_0,X_1,t) \right\} \qquad (15)$$

Wieder gilt $E_B(\ldots) \neq \emptyset$ und das Minimum $J_B(X_0,X_1)(t)$ wird angenommen. Wenn $(X_0,X_1) \neq (0,0)$ ist, erhält man durch eine einfache Überlegung

$$J_B^{-1}(X_0,X_1)(t) = \max\left\{|c|^2 : \exists f \in H(B), \|f\|_B \leq 1,\ f(t) = \right.$$
$$\left. = c : X_0, f_1(t) = c\,X_1\right\} \qquad (16)$$

Minima der Gestalt $J_B(X_0,X_1)(t)$ werden in [3] ausführlich behandelt für den Fall n = 2. In [9] sind sie für beliebige n in allgemeinerer Form untersucht (vgl. etwa [9], Formeln III (7) und (8)). Sie lassen sich ebenso wie im Fall n = 2 durch die Kernfunktion $K_B(t;\bar{t})$ und deren Ableitungen

$$K_{\nu\bar{0}}(t;\bar{t}) := \frac{\partial K_B}{\partial z_\nu}(t;\bar{t}),\ K_{0\bar{\nu}}(t;\bar{t}) :=$$
$$= \frac{\partial K_B}{\partial \bar{z}_\nu}(t;\bar{t}),\ K_{\nu\bar{\mu}}(t,\bar{t}) := \frac{\partial^2 K_B}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(t,\bar{t})$$

ausdrücken. Obwohl das in [9] für $J_B(X_0,X_1)(t)$ nicht explizit geschehen ist, wird hier auf die platzraubende Durchführung verzichtet. Es mag genügen zu sagen, dass man durch geeignete Wahl der $k,l,m_{1\mu},\ldots,m_{n\mu}$ und der $\beta_\mu^{(9)}$, $\mu = 1,\ldots,l$, $q = 1,\ldots,K$, in III (6) und Einsetzen in III(13) in [9] die folgende Beziehung erhält:

$$J_B(X_0,X_1,)(t) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & \bar{X}_0 & \bar{X}_1 \\ X_0 & K & K_{0\bar{1}} \\ X_1 & K_{1\bar{0}} & K_{1\bar{1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K & K_{0\bar{1}} \\ K_{1\bar{0}} & K_{1\bar{1}} \end{vmatrix}} \qquad (17)$$

Dabei sind die $K_{\nu\bar{\mu}}$ in den Determinanten an der Stelle $(t;\bar{t})$ zu nehmen (vgl. auch [3], II, Formel 1.3). (17) wird in folgender Umformung gebraucht:

$$J_B(X_0,X_1)(t) = \frac{|X_0|^2}{K_B(t;\bar{t})} + \frac{K_B(t;\bar{t})}{\begin{vmatrix} K & K_{0\bar{1}} \\ K_{1\bar{0}} & K_{1\bar{1}} \end{vmatrix}} \cdot \left| -\frac{K_{1\bar{0}}}{K} \cdot X_0 + X_1 \right|^2 \qquad (18)$$

(wieder alles an der Stelle $(t;\bar{t})$).

Als Spezialfall bekommt man

$$J_B(0,1)(t) := J_B(X_o = 0,\ X_1 = 1) = \frac{K}{\begin{vmatrix} K & K_{0\bar{1}} \\ K_{1\bar{0}} & K_{1\bar{1}} \end{vmatrix}} \qquad (19)$$

Es wird in dieser Arbeit zunächst das Randverhalten von $K_B(t;\bar{t})$, dann das von $J_B(0,1)(t)$ und schliesslich das Randverhalten einer weiteren speziellen Form von $J_B(X_o,X_1)(t)$ bestimmt. Mit (18) wird dann auch das Randverhalten von $K_{1\bar{0}}(t;\bar{t})$ beschreibbar.

5. $B \subset \mathbb{C}^n$ sei ein Gebiet. ∂B sei ein $z_o \in \partial B$ glatt. φ sei eine stetig differenzierbare reelle Funktion in einer Umgebung $U = U(z_o)$, so dass gilt

$$B \cap U = \{ z \in U : \varphi(z) < 0 \}, \quad d\varphi(z_o) \neq 0$$

φ wird kurz Randfunktion von B in z_o genannt.

Definition: Das Koordinatensystem z heisst zulässig bezüglich φ in z_o, wenn $z_o = 0$ und
$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(z_o) = -1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z_\mu}(z_o) = 0$ für $\mu = 1,\ldots,n$.

Offenbar kann man durch eine nicht-singuläre, lineare Koordinatentransformation immer erreichen, dass das Koordinatensystem zulässig ist (sogar durch eine unitäre Transformation mit anschliessender Dehnung in der neuen z_1-Richtung). Es ist deshalb keine wesentliche Einschränkung, wenn bei der Beschreibung des Randverhaltens der betrachteten Grössen die Zulässigkeit des Koordinatensystems gefordert wird.

Wegen der später notwendigen Einschränkung der Art der Annäherung wird definiert:

Definition: Das Gebiet B besitze in $z_0 \in \partial B$ einen glatten Rand, φ sei Randfunktion in z_0, das Koordinatensystem sei zulässig bez. φ in z_0.
Unter einer Kegelmenge in B bez. z_0 wird verstanden:

$$R_A(B;0) := \left\{ z \in B : \frac{|z_1 + \overline{z}_1|}{\|z\|} > \frac{1}{A} \right\}$$

mit einer beliebigen reellen Zahl $A > 2$.

Da es im folgenden meist nicht auf den speziellen Wert von A ankommt, wird auch einfach R(B;0) oder sogar R geschrieben. Statt ausführlich $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in R_A(B;0)}} \ldots$ zu schreiben, wird kurz

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ R}} \ldots$$

gesetzt. -

Es sei $\phi : U \to W$ eine biholomorphe Abbildung einer Umgebung $U = U(0)$ auf eine Umgebung $W = W(0)$, $w = \phi(z)$.

Definition: ϕ heisst zulässig, wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) $w_1 = f_1(z_1,\ldots,z_n)$, f holomorph in U,
   $w_\mu = z_\mu$, $\mu = 2,\ldots,n$.
2) $\phi(0) = 0$
3) $\frac{\partial(w)}{\partial(z)}(0) = \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0) = 1, \frac{\partial f_1}{\partial z_\mu}(0) =$
   $= 0$ für $\mu = 2,\ldots,n$.

Man überlegt sich leicht, dass mit ϕ auch ϕ^{-1} zulässig ist. Für zulässige Abbildungen gilt:

Satz 1.1: $B \subset \mathbb{C}^n$ sei ein Gebiet mit in $z_0 \in \partial B$ glattem Rand, φ sei Randfunktion in z_0, das Koordinatensystem sei zulässig bez. φ in z_0.

$\phi : B \to B'$ mit $w = \phi(z)$

sei eine zulässige Abbildung. Dann ist $\varphi_1(w) := \varphi \circ \phi^{-1}(w)$ Randfunktion von B' in $w_0 = \phi(z_0)$, w ist ein zulässiges Koordinatensystem bez. φ_1 in w_0 und es gilt:
Zu jeder reellen Zahl $A > 2^{-1}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung $U = U(0)$ mit

$$\phi(R_A(G;0) \cap U) \subset R_{A+\varepsilon}(B';\ 0)\ .$$

Weiter gilt:

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ R}} \frac{|w_1(z) + \overline{w_1(z)}|}{|z_1 + \overline{z_1}|} = 1$$

Beweis: Es brauchen nur die beiden letzten Aussagen bewiesen zu werden. Da ϕ zulässig ist, gilt in einer Umgebung von 0 $w_1(z) := f_1(z) = z_1 + h(z)$ mit $h(z) = o(\|z\|)$. Sei $z \in R_A(B;0)$. Dann folgt:

$$\frac{|w_1(z) + \overline{w_1(z)}|}{\|w(z)\|} \geq \frac{|z_1 + \overline{z_1}| - 2|h(z)|}{\|z\| + |h(z)|} = \frac{\frac{|z_1 + \overline{z_1}|}{\|z\|} - 2\frac{|h(z)|}{\|z\|}}{1 + \frac{|h(z)|}{\|z\|}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{A} \cdot \frac{1 - 2A\frac{|h(z)|}{\|z\|}}{1 + \frac{|h(z)|}{\|z\|}}$$

Wegen $\lim_{z \to 0} \frac{|h(z)|}{\|z\|} = 0$, gibt es eine Umgebung $U = U(0)$, so dass die rechte Seite für alle $z \in R_A(B;0) \cap U$ grösser als $\frac{1}{A + \varepsilon}$ ist. - Zum Beweis der letzten Aussage beachte man, dass für alle $z \in R_A(B;0)$ gilt:

$$1 - 2A\frac{|h(z)|}{\|z\|} \leq \frac{|w_1(z) + \overline{w_1(z)}|}{|z_1 + \overline{z_1}|} \leq 1 + 2A\frac{|h(z)|}{\|z\|}$$

6. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ heisse im Punkt $z_0 \in \partial G$ streng pseudo-konvex, wenn es eine Umgebung $U = U(z_0)$ und in U eine 2mal stetig differenzierbare Funktion φ gibt, so dass gilt:

a) $G \cap U = \{ z \in U : \varphi(z) < 0 \}$

b) für alle $t \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ mit $\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_\mu} t_\mu = 0$

ist $\sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(z_0)}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\mu} t_\nu \overline{t}_\mu > 0$

Man weiss, dass man in diesem Fall immer φ und U so wählen kann, dass statt b) sogar gilt:

b') für alle $t \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ und für alle $z \in U$ ist $\sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\mu} t_\nu \overline{t}_\mu > 0$, d.h., φ ist streng plurisubharmonisch in U (vgl. etwa [12], Corollary IX, A5).

Unter einem streng pseudo-konvexen Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ wird hier immer ein beschränktes Gebiet verstanden, das in allen Randpunkten streng pseudo-konvex ist. Zu ∂G gibt es dann immer eine Umgebung $U = U(\partial G)$ und eine in U 2mal stetig differenzierbare, streng plurisubharmonische Funktion φ, so dass

$$G = \{ z \in U : \varphi(z) < 0 \} \cup (G - U)$$

(vgl. etwa [12], Prop. IX, A4) .

Eine solche Funktion φ sei im folgenden kurz <u>globale Randfunktion</u> von G in U genannt. -

7. Schliesslich sei noch gesagt, dass für einen Bereich $B \subset \mathbb{C}^n$ wie üblich mit $H^q(B; \mathcal{O})$ für $q = 0,1,2,\ldots,$ die Cohomologiegruppen von B mit Koeffizienten in der

Garbe $\mathcal{O}$ der Keime holomorpher Funktionen über B bezeichnet werden. $H^0(B; \mathcal{O})$ kann in natürlicher Weise als Raum der über B holomorphen Funktionen aufgefasst werden und ist bezüglich der Topologie der gleichmässigen Konvergenz im Innern von B ein Fréchet-Raum.

§ 2. Konstruktion einer holomorphen Hilfsfunktion.

$G \subset \mathbb{C}^n$ sei wie immer in dieser Arbeit ein streng pseudo-konvexes beschränktes Gebiet, $z_0 \in \partial G$. Im § 6 wird eine in $\overline{G}$ holomorphe Funktion g_0 benötigt, die in z_0 den Wert 1 annimmt und in $\overline{G} - \{z_0\}$ überall dem Betrage nach kleiner als 1 ist. Diese Funktion dient dort dazu, um die Norm von $\mathcal{L}$-integrierbaren holomorphen Funktionen auf G genügend zu verkleinern, ohne ihre Werte in der Nähe von z_0 zu stark zu ändern. Die Konstruktion von g_0, die hier durchgeführt wird, verläuft nach einem bekannten Verfahren vermittels der Lösung eines Cousin-I-Problems.

Satz 2.1: $G \subset \mathbb{C}^n$ sei ein streng pseudo-konvexes beschränktes Gebiet, $z_0 \in \partial G$. Dann gibt es eine in $\overline{G}$ holomorphe Funktion g_0 mit $g_0(z_0) = 1$ und $|g_0(z)| < 1$ für alle $z \in \overline{G} - \{z_0\}$.

Beweis: Es gibt eine Umgebung $U = U(\partial G)$ und in U eine 2 x stetig differenzierbare streng plurisubharmonische Funktion φ, so dass gilt:

$$G = \{z \in U : \varphi(z) < 0\} \cup (G - U) .$$

Die Taylorformal ergibt für φ mit dem Entwicklungspunkt z_0:

$$\varphi(z) = \sum_j \varphi_j(z_0)\,(z_j - z_j^{(0)}) + \sum_j \varphi_{\bar{j}}(z_0)(\bar{z}_j - \bar{z}_j^{(0)}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \varphi_{ij}(z_0)(z_i - z_i^{(0)})(z_j - z_j^{(0)}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \varphi_{i\bar{j}}(z_0)(\bar{z}_i - \bar{z}_i^{(0)})(\bar{z}_j - \bar{z}_j^{(0)}) +$$

$$+ \sum_{i,j} \varphi_{i\bar{j}}(z_0)(z_i - z_i^{(0)})(\bar{z}_j - \bar{z}_j^{(0)}) + \tilde{\varphi}(z) \qquad (1)$$

mit $\tilde{\varphi}(z) = 0\ (\|z - z_0\|^2)$. Darin ist

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \quad , \quad \varphi_{\bar{i}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_i}$$

und entsprechend für die 2. Ableitungen. Damit definiere man das quadratische Polynom

$$p(z) := \sum_j \varphi_j(z_0)(z_j - z_j^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \varphi_{ij}(z_0)(z_i - z_i^{(0)})(z_j - z_j^{(0)}) \ . \qquad (2)$$

Man weiss dann (vgl. z.B. [12], Theorem IX, B 2), dass es eine Umgebung $U_1 = U_1(z_0)$ gibt, so dass die in U_1 analytische Menge

$$A := \{ z \in U_1 : p(z) = 0 \}$$

$\overline{G}$ nur in z_0 trifft:

$$A \cap \overline{G} = \{z_0\} \qquad (3)$$

Man kann nach eventueller Verkleinerung von $U = U(\partial G)$ offenbar annehmen, dass $A \cap U$ sogar in U analytisch ist. Ausserdem weiss man, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\hat{G} := \{ z \in U : (\varphi - \varepsilon)(z) < 0 \} \cup (G - U) \supset G$$

ein streng pseudo-konvexes Gebiet ist (vgl. etwa [12], Prop. IX, B 4). $A \cap \hat{G}$, das im folgenden weiter mit A

bezeichnet werde, ist in $\hat{G}$ analytisch, also abgeschlossen. $U_1 \cap \hat{G} \cap U$ sei weiter U_1 genannt. Lt. [11] ist $\hat{G}$ ein steinsches Gebiet und mit $U_2 := \hat{G} - A$ ist $\{(U_1, \frac{1}{p}), (U_2, 0)\}$ eine Cousin-I-Verteilung in $\hat{G}$. Also gibt es in $\hat{G}$ eine meromorphe Funktion $w = \hat{f}(z_1, \ldots, z_n)$, mit den folgenden Eigenschaften:

1) In U_1 ist $\hat{f} - \frac{1}{p} =: h$ holomorph.
2) In $U_2 = \hat{G} - A$ ist $\hat{f}$ holomorph. (4)

$\hat{f}$ definiert eine holomorphe Abbildung von $\hat{G}$ in $\overline{\mathbb{C}}$, die $\hat{G} - A$, insbesondere $\overline{G} - \{z_0\}$, in $\mathbb{C}$ und A, also auch z_0, in w_∞ abbildet.

Es soll nun gezeigt werden, dass man sogar erreichen kann, dass $\overline{G}$ in $\{w: \operatorname{Re} w < 0\} \cup \{w_\infty\}$ übergeht. Da in (1) die Matrix $(\varphi_{i\bar{j}}(z_0))$ eine positiv definite hermitesche Form definiert und $\varphi(z) = o(\| z - z_0 \|^2)$, gibt es wegen (2) eine Umgebung $\widetilde{U}_2 = \widetilde{U}_2(z_0) \Subset U_1$, so dass in $\overline{\widetilde{U}_2} \cap \overline{G}$ gilt:

$$0 \geq \varphi(z) \geq 2 \operatorname{Re} p(z) .$$

In $(\overline{G} - \{z_0\}) \cap \overline{\widetilde{U}_2}$ ist demnach $\operatorname{Re} p(z) < 0$. Da h lt. (4) in $\overline{\widetilde{U}_2}$ holomorph ist, hat man für ein geeignetes $M_1 > 0$ in $\overline{\widetilde{U}_2}$ $|\operatorname{Re} h(z)| \leq M_1$. Das ergibt

$$\operatorname{Re} \hat{f}(z) = \operatorname{Re} h(z) + \operatorname{Re} \frac{p(z)}{|p(z)|^2} < M_1 \text{ in } (\overline{\widetilde{U}_2} \cap \overline{G}) - \{z_0\} .$$

In $\overline{G} - \widetilde{U}_2$ ist $\hat{f}$ lt. (4) holomorph, also

$$\operatorname{Re} \hat{f}(z) < M_2 \text{ in } \overline{G} - \widetilde{U}_2$$

zusammen folgt also

$$\operatorname{Re} \hat{f}(z) < \max \{M_1, M_2\} \text{ in } \overline{G} - \{z_0\} .$$

Da $\hat{f}(z_0) = w_\infty$, ergibt sich, dass die Funktion $\tilde{f} := \hat{f} - \max\{M_1, M_2\}$ in $\hat{G}$ meromorph ist und $\overline{G}$ so in $\{w: \operatorname{Re} w < 0\} \cup \{w_\infty\}$ abbildet, dass dabei $\overline{G} - \{z_0\}$ in $\{w: \operatorname{Re} w < 0\}$ und z_0 in w_∞ übergeht.

Es sei nun

$$v := f_1(w) = \frac{-w-1}{-w+1}$$

Wie man leicht sieht, geht bei f_1 $\{w: \operatorname{Re} w < 0\}$ in das Innere des Einheitskreises E und w_∞ in 1 über. Die Funktion $g_0 := f_1 \circ \tilde{f}$ besitzt dann die im Satz geforderten Eigenschaften.

§ 3. Ein Approximationssatz für holomorphe Funktionen.

Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis eines Approximationssatzes für 2-integrierbare, holomorphe Funktionen, der es erlauben wird, die Frage nach dem Verhalten der Kernfunktion am Rande von streng pseudo-konvexen Gebieten auf die Untersuchung der Kernfunktion in sehr kleinen Gebieten zurückzuführen. Dadurch ist es möglich, die umständliche Konstruktion der Bergmanschen Vergleichskörper [3], die zudem zusätzliche starke Voraussetzungen an das betrachtete Gebiet erforderlich macht, zu vermeiden. Der Approximationssatz lautet:

Theorem 3.1: $G \subset \mathbb{C}^n$ sei ein streng pseudo-konvexes Gebiet und $z_0 \in \partial G$. Sei $U = U(\partial G)$ eine offene Umgebung von ∂G und φ eine in U zweimal stetig differenzierbare streng plurisubharmonische Funktion, so dass gilt

$$G \cap U = \{ z \in U : \varphi(z) < 0 \} .$$

Es sei $d\varphi(z_0) \neq 0$. - Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$, das kleiner als der kleinste Eigenwert der Leviform von φ in z_0 ist, beliebig kleine Polyzylinder $P = P(z_0) \subset U$ um z_0, so dass folgendes gilt:
Es sei $0 < \eta$ beliebig und $P' \Subset P$ ein relativ-kompakt in P enthaltener Polyzylinder um z_0; ferner sei

$$G_1 := \{ z \in P : \varphi(z) - \varepsilon \cdot \| z - z_0 \|^2 < 0 \}$$

und

$$F := \{ f \in H(G_1) : \| f \|_{G_1} \leq 1 \} .$$

Dann gibt es ein $L \in \mathbb{R}$, so dass es zu beliebigem, aber festen $t \in P' \cap G$ und zu jedem $f \in F$ ein $\hat{f} \in H(G)$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

1) $\| \hat{f} \|_G \leq L$;

2) $\hat{f}(t) = f(t)$; $\frac{\partial \hat{f}}{\partial z_\mu}(t) = \frac{\partial f}{\partial z_\mu}(t)$, $\mu = 1, \ldots, n$,

3) $| \hat{f} - f |_{G \cap P'} \leq \eta$;

4) $\left| \frac{\partial \hat{f}}{\partial z_\mu} - \frac{\partial f}{\partial z_\mu} \right|_{G \cap P'} \leq \eta$.

Der Beweis dieses Satzes gliedert sich in mehrere Schritte. Zunächst wird gezeigt:

Satz 3.2: Unter den Voraussetzungen des Theorems 3.1 kann man zu jedem $\varepsilon > 0$, das kleiner als die Eigenwerte der Leviform von φ in z_0 ist, beliebig kleine Polyzylinder $P = P(z_0) \subset U$ um z_0 finden, so dass $(G_1, \mathbb{C}^n)$ ein Rungesches Paar bilden.

Beweis: Offenbar genügt es zu zeigen, dass (G_1,P) für genügend kleine geeignete P ein Rungesches Paar bilden. Dazu setze man mit dem fest vorgegebenen $\varepsilon > 0$ $\psi(z) := \varphi(z) - \varepsilon \cdot \| z - z_0 \|^2$ in U. Dann ist $\psi(z)$ in einer Umgebung von z_0 streng plurisubharmonisch, da ε kleiner als die Eigenwerte der Leviform von φ in z_0 ist. Man kann also einen genügend kleinen Polyzylinder P_1 um z_0 wählen, so dass in P_1 $d\psi \neq 0$ und $\{ z \in P_1 : \psi(z_1) < 0 \}$ holomorph-konvex ist. Ausserdem gibt es dann ein $\eta_1 > 0$ (laut einem Satz von Levi) mit der Eigenschaft, dass für alle $0 \leq \eta \leq \eta_1$ $\{ z \in P_1 : (\psi - \eta)(z) < 0 \}$ holomorph-konvex ist. Nun wähle man in P_1 einen Polyzylinder P um z_0, in dem $\psi(z) < \eta_1$ bleibt und definiere

$$G_1^{(\eta)} := \{ z \in P : (\psi - \eta)(z) < 0 \} .$$

Dann hat man: $G_1^{(\eta)}$ ist holomorph-konvex, ψ hat in P wegen $d\psi \neq 0$ kein lokales Minimum, $G_1^{(\eta_1)} = P$. Also ist $G_1 := G_1^{(0)}$ laut Satz 18 in Docquier-Grauert [10] halbstetig holomorph ausdehnbar auf P. Laut Satz 17 und 16 der gleichen Arbeit ist damit gezeigt, dass (G_1,P) ein Rungesches Paar bilden. Offenbar bleibt die Aussage bei Verkleinerung von P richtig.

Satz 3.3: Das beschränkte Gebiet $B \subset \mathbb{C}^n$ sei ein Rungesches Gebiet. Es sei $F_B := \{ f \in H(B) : \| f \|_B \leq 1 \}$. Ferner sei $M \subset B$ kompakt und $\eta > 0$ beliebig. Dann gibt es zu jedem beschränkten Gebiet $\hat{B} \subset \mathbb{C}^n$ ein L_1, so dass gilt: zu jedem $f \in F_B$ gibt es ein $\hat{f} \in H^0(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ mit

1) $|\hat{f} - f|_M < \eta$,

2) $\| \hat{f} \|_{\hat{B}} \leq L_1(\eta, B, \hat{B}, M)$.

Beweis: $H^0(B,\mathcal{O})$ ist bez. der Topologie der gleichmässigen Konvergenz im Inneren von B ein Fréchet-Raum und

als solcher metrisierbar. Daraus folgt: $F_B \subset H^0(B,\mathcal{O})$ ist kompakt. Denn F_B ist lt. (1.1) im Inneren von B gleichmässig beschränkt, und wenn $\{f_\nu\} \subset F_B$ eine Folge von Funktionen ist, die im Inneren von B gleichmässig gegen ein $f \in H^0(B,\mathcal{O})$ konvergiert, liegt f offenbar auch in F_B. Man ordne nun jedem $f_0 \in H^0(B,\mathcal{O})$ die offene Menge $\mathcal{U}_{f_0} :=$
$= \{g \in H^0(B,\mathcal{O}) : |g - f_0|_M < \frac{\eta}{2}\}$ mit den im Satz vorgegebenen M, η zu. Dann gibt es wegen der Kompaktheit von F_B Funktionen $f_1,\ldots,f_r \in F_B$, so dass $F_B \subset \bigcup_{\varrho=1}^{r} \mathcal{U}_{f_\varrho}$. Da B laut Voraussetzung ein Rungesches Gebiet ist, gibt es weiter $f_{1\varrho} \in H^0(\mathbb{C}^n,\mathcal{O})$ mit $f_{1\varrho} \in \mathcal{U}_{f_\varrho}$, $\varrho = 1,\ldots,r$. Sei nun $f \in F_B$ beliebig. Dann liegt f in einem $\mathcal{U}_{f_\varrho}$ und man hat

$$|f - f_{1\varrho}|_M \leq |f - f_\varrho|_M + |f_\varrho - f_{1\varrho}|_M < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta$$

Setzt man schliesslich

$$L_1 = \max_{\varrho=1,\ldots,r} \| f_{1\varrho} \|_{\hat{B}} ,$$

so ist L_1 unabhängig von der speziellen Wahl von $f \in F_B$ und besitzt die geforderte Eigenschaft.

Für den endgültigen Beweis des Theorems 3.1 müssen nun in der dort gegebenen Situation zu G einige Hilfsgebiete im $\mathbb{C}^n$ konstruiert werden. Zu dem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ wähle man zunächst einen Polyzylinder P um z_0, so dass Satz 3.2 gilt (man kann P beliebig klein wählen). Ausserdem weiss man, dass für jede 2mal stetig differenzierbare reelle Funktion $\tilde{\varphi}$ auf einer Umgebung $W \subset U$ von ∂G, die dem Betrag nach mitsamt ihren 1. und 2. Ableitungen in W genügend klein ist, die Funktion $\varphi - \tilde{\varphi}$ in W auch streng plurisubharmonisch ist und

$$G_{\tilde{\varphi}} := \{z \in W : (\varphi - \tilde{\varphi})(z) < 0\} \cup (G - W)$$

streng pseudo-konvex ist. (siehe z.B. Gunning-Rossi [12], IX, B 4). Ein derartiges W und mehrere Funktionen $\tilde{\varphi}$ mit

dieser Eigenschaft sollen jetzt konstruiert werden.

Seien $B_{r_3} \Subset B_{r_1} \Subset P$ die beiden Hyperkugeln um z_o mit den Radien $0 < r_3 < r_1$. $\partial G - B_{r_1}$ ist dann abgeschlossen und trifft $\overline{B}_{r_3}$ nicht. Also gibt es eine relativ-kompakte Umgebung $W_o \subset U$ von $\partial G - B_{r_1}$ mit $\overline{W}_o \cap B_{r_3} = \emptyset$. Man setze

$$W := W_o \cup B_{r_1} \tag{1}$$

und wähle eine offene Menge W_o' und ein $r_2 : r_1 > r_2 > r_3$, so dass gilt:

$$\partial G \subset W_o' \cup B_{r_2} \; ; \; \overline{W_o'} \subset W_o \tag{2}$$

Dann gibt es nach einem bekannten Satz der reellen Analysis zwei reell-wertige C^∞ - Funktionen ψ_0, ψ_1 im $\mathbb{C}^n$, die den folgenden Forderungen (3) - (6) genügen:

$$\psi_0 \geq 0, \quad \psi_1 \geq 0 \tag{3}$$

$$W'_o \subset \{z \in \mathbb{C}^n : \psi_0(z) > 0\} \subset W_o, \; B_{r_2} \subset \{z \in \mathbb{C}^n : \psi_1(z) > 0\} \subset B_{r_1} \tag{4}$$

$\psi_0, \frac{\psi_0}{2} - 2\psi_1, \psi_0 + \psi_1, \psi_0 - \psi_1$ sind mitsamt ihren 1. und 2. Ableitungen genügend klein im obigen Sinn. (5)

$$\psi_0(z) < \varepsilon \cdot r_3^2 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n \tag{6}$$

Nun definiere man

$$\hat{G} := \{z \in W : (\varphi - \psi_0 - \psi_1)(z) < 0\} \cup (G - W) \tag{8}$$

$$\tilde{G} := \{z \in W : (\varphi - \tfrac{\psi_0 + \psi_1}{2})(z) < 0\} \cup (G - W) \tag{9}$$

$$G_B := \hat{G} \cap P \tag{10}$$

$$G_R := \{z \in W : (\varphi - \psi_0 + \psi_1)(z) < 0\} \cup (G - W) \tag{11}$$

$$G_r := \{z \in W : (\varphi - \tfrac{\psi_0}{2} + 2\psi_1)(z) < 0\} \cup (G - W) \tag{12}$$

Es sei $P' \Subset P$ ein Polyzylinder um z_o, wie er im Theorem 3.1 als gegeben vorausgesetzt ist. Dann gibt es offenbar einen weiteren Polyzylinder P_1' für den gilt:

$$B_{r_1} \Subset P_1' \Subset P \quad \text{und} \quad P' \Subset P_1'$$

Damit definiere man weiter:

$$G_b := \tilde{G} \cap P_1' \quad ; \quad G_b^1 := G_b \cap G \; ; \; G_r^1 := G_r \cap G \tag{13}$$

Es müssen nun eine Reihe von Eigenschaften der definierten Bereiche hergeleitet werden, die zum Beweis von Theorem 3.1 gebraucht werden.

Wegen (5) sind $\hat{G}$, $\tilde{G}$, G_R, G_r streng pseudo-konvex, woraus folgt:

$$\hat{G},\ \tilde{G},\ G_R,\ G_r,\ G_B,\ G_b \text{ sind steinsch.} \tag{14}$$

Wegen (3) und da auf $\partial G \subset W_o' \cup B_{r_2}$ $\psi_o + \psi_1 > 0$ ist, hat man

$$G \Subset \tilde{G} \tag{15}$$

Ist ferner in $z \in W$ $(\varphi - \frac{\psi_o + \psi_1}{2})(z) = 0$, also $z \in \partial \tilde{G}$, so kann $\varphi(z)$ und also auch $(\psi_o + \psi_1)(z)$ nicht Null sein. Daraus folgt:

$$G \Subset \tilde{G} \Subset \hat{G} \tag{16}$$

(13) ergibt zusammen mit der Definition von G_1

$$G_b^1 \subset G_1 \tag{17}$$

Schliesslich gilt:

$$G_r \Subset G_R \tag{18}$$

Denn offenbar ist $G_r \subset G_R$ und wenn $z \in \partial G_r$ ist, gilt $z \in W$ und

$$(\varphi - \frac{\psi_\varphi}{2} + 2\psi_1)(z) = 0 \tag{19}$$

Ist dann $\varphi(z) = 0$, also $z \in \partial G$, hat man wegen $\partial G \subset W_o' \cup B_{r_2}$ $\psi_o(z) \neq 0$ oder $\psi_1(z) \neq 0$. Andernfalls folgt das sofort aus (19). In jedem Fall gilt

$$(\varphi - \psi_o + \psi_1)(z) < (\varphi - \frac{\psi_o}{2} + 2\psi_1)(z) = 0,$$

$$\text{also } z \in G_R \ .$$

Aus (1o), (13), (16) folgt wegen $P_1' \subset P$

$$G_b \subset G_B \tag{2o}$$

Als nächstes wird gezeigt:

$$G_B \cup G_R = \hat{G} \tag{21}$$

Offenbar braucht dazu nur gezeigt zu werden: $\hat{G} \subset G_B \cup G_R$. Sei also $z \in \hat{G} - G_R$ beliebig. Dann hat man $z \in W$ und $\psi_1(z) > 0$, also $z \in B_{r_1}$ und damit $z \in P \cap \hat{G} = G_B$ wegen $B_{r_1} \subset P$.

Ebenso beweist man

$$G_b \cup G_r = \tilde{G} \tag{22}$$

Daraus ergibt sich offenbar lt. (13): $G_r^1 \cup G_b^1 = G$ (22a)

Wegen (15) und $P' \subset P_1'$ hat man

$$G \cap P' \subset \tilde{G} \cap P_1' = G_b \tag{22b}$$

Schliesslich braucht man noch

$$G_B \cap G_R \subset G_1 \tag{23}$$

Um das einzusehen, beachte man zunächst, dass lt. (1o) $G_B \cap G_R \subset P$. Sei also $z \in G_R \cap P$. Dann liegt z lt. (11) in $G - W$ oder es gilt $z \in W$ und $(\varphi - \psi_o + \psi_1)(z) < 0$.

Im ersten Fall ist $z \in G \cap P \subset G \cap U$, also $\varphi(z) < 0$. Dann liegt z offenbar in

$$G_1 = \{ z \in P : \varphi(z) - \varepsilon \cdot \| z - z_0 \|^2 < 0 \}.$$

Im zweiten Fall braucht nur die Möglichkeit $\varphi(z) \geq 0$ behandelt zu werden. Es folgt $(\psi_0 - \psi_1)(z) > 0$. Nun gilt lt. (6) in $\mathbb{C}^n - B_{r_3}$

$$\varepsilon \cdot \| \tilde{z} - z_0 \|^2 \geq \psi_0(\tilde{z}) \qquad (24)$$

Da lt. (4) und wegen $W_0 \cap B_{r_3} = \emptyset$ in B_{r_3} aber $\psi_0 \equiv 0$ ist, ist (24) für alle $\tilde{z} \in \mathbb{C}^n$ richtig. (24) angewandt auf das obige $z \in P$ liefert

$$\varphi(z) - \varepsilon \cdot \| z - z_0 \|^2 \leq \varphi(z) - \psi_0(z) + \psi_1(z) < 0,$$

also ist $z \in G_1$.

Damit ist die beim Beweis des Theorems 3.1 erforderliche Situation hergestellt. Es werden die hier eingeführten Bezeichnungen weiter benutzt. Es folgt der letzte Teil vom

Beweis des Theorems 3.1:

I. Laut (14) und (21) ist $\mathfrak{U} := \{G_B, G_R\}$ eine steinsche Überdeckung von $\hat{G}$ und $\hat{G}$ selbst ist ebenfalls steinsch. Lt. Cartan's Theorem B gilt also für die Cohomologiegruppen

$$H^p(\hat{G}, \mathcal{O}) = H^p(G_B, \mathcal{O}) = H^p(G_R, \mathcal{O}) = H^p(G_B \cap G_R, \mathcal{O}) = 0$$

für alle $p \geq 1$.

Mit dem Theorem von Leray (vgl. etwa [12]) erhält man, wenn $H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ in üblicher Weise die p-te Cohomologiegruppe der Überdeckung $\mathfrak{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{O}$ bezeichnet:

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \cong H^1(\hat{G}, \mathcal{O}) = 0 \quad .$$

Das bedeutet gemäss der Definition von $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, dass die Abbildung

$$\chi : H^0(G_B,\mathcal{O}) \times H^0(G_R,\mathcal{O}) \to H^0(G_B \cap G_R, \mathcal{O}) ,$$

die durch $\chi(h_1,h_2) := h_1|_{G_B \cap G_R} - h_2|_{G_B \cap G_R}$ für alle $(h_1,h_2) \in H^0(G_B,\mathcal{O}) \times H^0(G_R,\mathcal{O})$ definiert ist, surjektiv ist (jeder 1-Cozyklus über $\mathcal{U}$ ist Corand). Andererseits ist χ eine lineare, stetige Abbildung, wenn man $H^0(G_B,\mathcal{O})$ $H^0(G_R,\mathcal{O})$ und $H^0(G_B \cap G_R,\mathcal{O})$ in üblicher Weise als Fréchet-Räume betrachtet. Der Satz von Banach (vgl. etwa [8]) sagt dann:

$$\chi \text{ ist offen} \tag{25}$$

Es sei $\eta_1 > 0$ beliebig. Dann sind wegen (18) und (2o) die Mengen

$$\mathcal{M}_1 := \{ h_1 \in H^0(G_B,\mathcal{O}) : |h_1|_{G_b} < \eta_1 \} \quad \text{bzw.}$$

$$\mathcal{M}_2 := \{ h_2 \in H^0(G_R,\mathcal{O}) : |h_2|_{G_r} < \eta_1 \}$$

jeweils offene Umgebungen der 0 in $H^0(G_B,\mathcal{O})$ bzw. $H^0(G_R,\mathcal{O})$. Also ist $\chi(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) \subset H^0(G_B \cap G_R,\mathcal{O})$ ebenfalls offen und es gibt eine kompakte Menge $M \subset G_B \cap G_R$ und ein $\eta_2 > 0$, so dass

$$\mathcal{M}_3 := \{ g \in H^0(G_B \cap G_R,\mathcal{O}) : |g|_M < \eta_2 \} \subset \chi(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) .$$

II. Es wird jetzt ausgenutzt, dass G_1 laut Konstruktion ein Rungesches Gebiet ist und M lt. (23) kompakt in G_1 liegt. Es gibt deshalb nämlich wegen Satz 3.3 zu M, η_2 und G eine Konstante $L_1 > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:

Zu jedem $f \in F = \{ f \in H(G_1) : \|f\|_{G_1} \leq 1 \}$ kann man ein $f_1 \in H^0(\mathbb{C}^n,\mathcal{O})$ finden, das den Bedingungen

$$|f - f_1|_M < \eta_2 \quad \text{und} \quad \|f_1\|_G \leq L_1 \tag{26}$$

genügt. Man beachte dabei, dass L_1 abgesehen von der

"geometrischen" Situation nur von η_1, nicht aber von der speziellen Wahl von $f \in F$ abhängt.

Wegen (26) und (23) gilt offenbar:

$$f - f_1 \in \mathcal{M}_3 \subset \chi(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) \quad .$$

Es gibt also $h_1 \in \mathcal{M}_1$ und $h_2 \in \mathcal{M}_2$, so dass

$$f - f_1 = h_1 - h_2 \quad \text{auf } G_B \cap G_R, \tag{27}$$

$$|h_1|_{G_b} < \eta_1 \quad \text{und} \quad |h_2|_{G_r} < \eta_1 \tag{28}$$

Damit definiere man

$$\tilde{f} := \begin{cases} f - h_1 & \text{auf } G_b^1 = G_b \cap G \\ f_1 - h_2 & \text{auf } G_r^1 = G_r \cap G \end{cases} \tag{29}$$

Das ist wegen (17) und $G_b^1 \cap G_r^1 \subset G_B \cap G_R$ möglich, und es ist $\tilde{f} \in H^0(G, \mathcal{O})$. Lt. (28) hat man

$$|\tilde{f} - f|_{G_b^1} \leq |h_1|_{G_b} < \eta_1 \tag{30}$$

Ausserdem gilt lt. (22a), (17), (28), (26)

$$\|\tilde{f}\|_G \leq \|f - h_1\|_{G_b^1} + \|f_1 - h_2\|_{G_r^1} \leq \|f\|_{G_1} + \|h_1\|_{G_b^1} +$$

$$+ \|f_1\|_G + \|h_2\|_{G_r^1} \leq$$

$$\leq 1 + \eta_1 \cdot V^{\frac{1}{2}}(G_b^1) + L_1 + \eta_1 \cdot V^{\frac{1}{2}}(G_r^1) =: L_2 \tag{31}$$

Die Grösse L_2 hängt dabei nur von der "Geometrie" und η_1, nicht aber von der speziellen Wahl von $f \in F$ ab.

Als nächstes werden die 1. Ableitungen von f mit denen von $\tilde{f}$ über $G \cap P'$ verglichen. Auf $G \cap P' \subset G_b \cap G$ gilt lt. (29) für alle $\mu = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial z_\mu} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_\mu} = \frac{\partial h_1}{\partial z_\mu} \qquad (32)$$

Da weiter lt. (22 b) $G \cap P' \Subset G_b$, ist der Abstand d von $G \cap P'$ und ∂G_b in der Maximumnorm positiv. Es seien $t \in G \cap P'$ und $0 < \delta < d$ beliebig. Dann gilt

$$P(d-\delta;t) := \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |z_\nu - t_\nu| < d - \delta \right\} \Subset G_b \quad .$$

Die Anwendung der Cauchyschen Integralformel ergibt

$$\frac{\partial h_1}{\partial z_\mu}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_\nu - t_\nu| = d-\delta} \frac{h_1(z)\, dz_1 \dots dz_n}{(z_1-t_1)\dots(z_\mu-t_\mu)^2(z_{\mu+1}-t_{\mu+1})\cdots(z_n-t_n)}$$

für alle $\mu = 1,\dots,n$.

Daraus folgt durch die übliche Abschätzung wegen (32)

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_\mu}(t) - \frac{\partial f}{\partial z_\mu}(t) \right| = \left| \frac{\partial h}{\partial z_\mu}(t) \right| \leq \frac{\eta_1}{(2\pi)^n d^{n+1}}$$

für alle $t \in G \cap P'$
und für alle $\mu = 1,\dots,n$. (33)

III. Es muss im wesentlichen noch gezeigt werden, dass auch die Forderung 2) des Theorems 3.1 erfüllbar ist. Sei also $t_o \in G \cap P'$ im folgenden fest. Dann definiere man

$$\hat{f} := \tilde{f} - (\tilde{f}(t_o) - f(t_o)) - \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_\mu}(t_o) - \frac{\partial f}{\partial z_\mu}(t_o) \right) \cdot (z_\mu - t_\mu^{(o)}) \qquad (34)$$

Dann gilt offenbar

$$\hat{f}(t_o) = f(t_o) \; ; \; \frac{\partial \hat{f}}{\partial z_\mu}(t_o) = \frac{\partial f}{\partial z_\mu}(t_o) \text{ für alle } \mu = 1,\dots,n, \qquad (35)$$

$\hat{f}$ genügt also der Forderung 2). Ausserdem gibt es wegen der Beschränktheit von G eine nur von G und P' abhängige reelle

Zahl . R mit der Eigenschaft

$$|z_\mu - t_\mu|_G \leq R$$

für $\mu = 1,\ldots,n$ und für alle $t \in P'$ (der Ausdruck $z_\mu - t_\mu$ ist als Funktion von $z \in G$ aufgefasst).
Das ergibt unter Beachtung von (31), (3o) und (33):

$$\|\hat{f}\|_G \leq L_2 + \eta_1 V^{\mathcal{Z}}(G) + \eta_1 \cdot \frac{n R V^{\mathcal{Z}}(G)}{(2\pi)^n d^{n+1}} =: L(\eta_1) \qquad (36)$$

Mit (3o), (33) und (34) ergibt sich weiter:

$$|\hat{f}-f|_{G\cap P'} \leq |\hat{f}-\tilde{f}|_{G\cap P'} + |\tilde{f}-f|_{G\cap P'} \leq \eta_1 + \eta_1 + \eta_1 \cdot \frac{n R}{(2\pi)^n d^{n+1}} =$$

$$= \eta_1 (2 + \frac{n R}{(2\pi)^n d^{n+1}}) \qquad (37)$$

$$\left|\frac{\partial \hat{f}}{\partial z_\mu} - \frac{\partial f}{\partial z_\mu}\right|_{G\cap P'} \leq \left|\frac{\partial \hat{f}}{\partial z_\mu} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_\mu}\right|_{G\cap P'} + \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_\mu} - \frac{\partial f}{\partial z_\mu}\right|_{G\cap P'} \leq$$

$$\leq \eta_1 \cdot \frac{2}{(2\pi)^n d^{n+1}} \qquad (38)$$

für $\mu = 1,\ldots,n$.

Nun nehme man an, dass zu vorgegebenem $\eta > 0$ das im Beweis beliebige $\eta_1 > 0$ so klein gewählt ist, dass gilt:

$$\max\left\{\eta_1 (2 + \frac{n R}{(2\pi)^n d^{n+1}}) \;,\; \eta_1 \cdot \frac{2}{(2\pi)^n d^{n+1}}\right\} \leq \eta ,$$

und setze L gleich der lt. (36) dazu bestimmten Zahl $L(\eta_1)$. Dann hängt η_1 und damit auch L offenbar nur von η und der "Geometrie", nicht aber von der speziellen Wahl von $f \in F$ und $t_o \in G\cap P'$ ab. Wegen (35) - (38) ist damit das Theorem 3.1 bewiesen.

Zusatz: Der Beweis des Theorems 3.1 zeigt, dass dessen Aussage sinngemäss gültig bleibt, wenn man darin F durch irgendeine kompakte Teilmenge $\tilde{F}$ von $H^0(G_1,\mathcal{O})$ ersetzt. Man erhält dann ein $\tilde{L}$ und zu jedem $f \in \tilde{F}$ ein $\hat{f} \in H^0(G,\mathcal{O})$, das den Forderungen 2) - 4), sowie der Forderung $\tilde{1}$) $|\hat{f}|_{G-P} \leq \tilde{L}$ genügt.

§ 4. Die Kernfunktion und die benötigten Minima in analytischen Ellipsoiden.

Es sei $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ eine positiv definite hermitesche Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$G_E := \left\{ z \in \mathbb{C}^n : o > -z_1 - \overline{z}_1 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i \overline{z}_j = \varphi_E(z) \right\} \qquad (1)$$

ein streng pseudo-konvexes Gebiet und das Koordinatensystem ist bezüglich der in (1) gegebenen Darstellung von ∂G_E und $z_o = 0 \in \partial G_E$ zulässig. Damit kann G_E als ein Beispiel für die in der Arbeit behandelten Gebiete dienen.

Definition 4.1: Unter einem analytischen Ellipsoid werde ein Gebiet der Form (1) verstanden.

Für spätere Zwecke beachte man noch, dass für eine genügend kleine Umgebung $V = V(o)$ gilt: $z_1 + \overline{z}_1 > o$ für alle $z \in G_E \cap V$. Hauptziel der späteren Untersuchungen wird es sein, zu beweisen, dass das Randverhalten aller behandelten Grössen in beliebigen streng pseudo-konvexen Gebieten gleich dem Randverhalten der Grössen in analytischen Ellipsoiden ist. Für letztere lassen sich alle Grössen vollständig berechnen. Das soll in diesem Paragraphen durchgeführt werden.

Satz 4.1: G_E sei wie in (1). Die Bergmansche Kernfunktion von G_E lautet:

$$K_{G_E}(z;\bar{z}) = \frac{n!\ \det(a_{ij})_{i,j=2}^{n}}{\pi^n (z_1+\bar{z}_1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i \bar{z}_j)^{n+1}} \qquad (2)$$

Beweis: $z = (z_1,\dots,z_n)$ wird in diesem Beweis häufig als Spaltenvektor aufgefasst, mit z' wird wie üblich der transponierte Zeilenvektor von z bezeichnet. Mit der positiv definiten hermiteschen Matrix $A := (a_{ij})$ ist auch die daraus durch Streichung der 1. Spalte und der 1. Zeile hervorgehende $(n-1)$- reihige Matrix $(a_{ij})_2^n$ hermitesch (positiv definit). Es gibt also im Raum der Veränderlichen $z_2,\dots,z_n$ eine unitäre Transformation $(t_{ij})_2^n$, die $(a_{ij})_2^n$ auf Diagonalgestalt bringt. T bezeichne dann die unitäre Transformation

$$z_1 = \zeta_1$$
$$z_i = \sum_{j=2}^{n} t_{ij}\,\zeta_j \ , \quad i = 2,\dots,n \ ,$$

also $z = T\zeta$. Für $B := T'\,A\,\bar{T}$ gilt dann

$$\sum a_{ij}\, z_i\, \bar{z}_j = z'\,A\bar{z} = \zeta' B \bar{\zeta}$$

und mit $B = (b_{ij})$: $b_{ij} = b_{jj}\,\delta_{ij}$, $i,j = 2,\dots, n$.

Die b_{jj} sind gerade die Eigenwerte von $(a_{ij})_2^n$, $j = 2,\dots,n$.

Man prüft leicht nach, dass die anschliessend durchgeführte lineare Transformation T_2 mit

$$\zeta = T_2 w : \quad \zeta_1 = w_1$$
$$\zeta_j = w_j - w_1 \frac{b_{1j}}{b_{jj}} \ , \ j = 2,\dots,n$$

wiederum unimod. ist und dass

$$C = (c_{ik}) := T_2' \,B\, \bar{T}_2$$

Diagonalgestalt hat und die c_{kk} für $k = 2,\dots,n$ die Eigenwerte von $(a_{ij})_2^n$ sind. Es gilt

$$G_1 := (T \circ T_2)^{-1}(G_E) = \{w \in \mathbb{C}^n : -w_1 - \overline{w_1} + \sum_{k=1}^{n} c_{kk} |w_k|^2\}$$

und wegen $|\det T \cdot T_2| = 1$ ist lt. (1.4)

$$K_{G_E}(z;\overline{z}) = K_{G_1}(w;\overline{w}) \quad \text{mit } z = T \circ T_2 w \qquad (3)$$

für alle $w \in G_1$.

Eine einfache Umrechnung liefert:

$$G_1 = \left\{w : \frac{1}{c_{11}} > c_{11}|w_1 - \frac{1}{c_{11}}|^2 + \sum_{k=2}^{n} c_{kk}|w_k|^2\right\}$$

Es gilt $c_{kk} > 0$, $k = 1,\dots,n$. Man definiere die lineare Abbildung T_3 durch

$$w_1 = v_1 + \frac{1}{c_{11}}$$

$$w_k = c_{kk}^{-\frac{1}{2}} v_k \qquad k = 2,\dots,n.$$

Man erhält:

$$G_2 := T_3^{-1}(G_1) = \left\{v : \frac{1}{c_{11}} > \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2\right\}$$

G_2 ist also die Hyperkugel um $v = 0$ mit dem Radius $c_{11}^{-\frac{1}{2}}$. Dafür lautet die Bergmansche Kernfunktion lt. (1.8)

$$K_{G_2}(v;\overline{v}) = \frac{n! \frac{1}{c_{11}}}{\pi^n (\frac{1}{c_{11}} - \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2)^{n+1}}$$

Da $\det T_3^{-1} = \left(\prod_{k=1}^{n} c_{kk}\right)^{1/2}$, ergibt sich daraus wegen (1.4) und (3)

$$K_{G_E}(z;\bar{z}) = \frac{n!\ \prod_{k=2}^{n} c_{kk}}{\pi^n (z_1+\bar{z}_1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, z_i \bar{z}_j)^{n+1}}$$

Beachtet man noch, dass $\prod_{k=2}^{n} c_{kk} = \det(a_{ij})_2^n$, so ist die Behauptung bewiesen.

Definition 4.2: φ sei eine in einer Umgebung $V = V(0)$ zweimal stetig differenzierbare streng plurisubharmonische Funktion. Dann sei

$$\varkappa(\varphi) := \det(\varphi_{i\bar{j}}(0))_2^n$$

Es ist offenbar $\varkappa(\varphi) > 0$.

Durch Differentiation von (2) und unter Beachtung von (1.9) und (1.19) folgt aus Satz 4.1

Satz 4.2: G_E sei wie in (1). Dann gilt:

$$\frac{\partial K_{G_E}}{\partial z_\mu}(z;\bar{z}) = \frac{(n+1)!\,\varkappa(\varphi_E)(\sum_{i=1}^{n} a_{\mu i}\bar{z}_i - \delta_{1\mu})}{\pi^n(-\varphi_E(z))^{n+2}}, \quad \mu = 1,\dots,n \qquad (4)$$

$$\frac{\partial K_{G_E}}{\partial \bar{z}_\mu}(z;\bar{z}) = \overline{\frac{\partial K_{G_E}}{\partial z_\mu}(z;\bar{z})} \qquad \mu = 1,\dots,n \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2 K_{G_E}(z;\bar{z})}{\partial z_\nu\, \partial \bar{z}_\mu} = \frac{(n+1)!\,\varkappa(\varphi_E)a_{\nu\mu}}{\pi^n(-\varphi_E(z))^{n+2}} + \frac{(n+2)!\,\varkappa(\varphi_E)(\sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\bar{z}_i - \delta_{1\nu})(\sum_{i=1}^{n} a_{i\mu} z_i - \delta_{1\mu})}{\pi^n(-\varphi_E(z))^{n+3}} \qquad (6)$$

$\nu,\mu = 1,\dots,n$

$$ds^2_{G_E}(z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \left[\frac{(n+1)a_{\nu\mu}}{-\varphi_E(z)} + \frac{(n+1)(\sum_{j=1}^{n} a_{\nu j}\bar{z}_j - \delta_{1\nu})(\sum_{i=1}^{n} a_{i\mu} z_i - \delta_{1\mu})}{(-\varphi_E(z))^2}\right] dz_\nu\, d\bar{z}_\mu$$

$$J_{G_E}(0;1)(t) = \frac{K_{G_E}(t;\bar{t})}{\begin{vmatrix} K_{G_E} & K_{0\bar{1}} \\ K_{1\bar{0}} & K_{1\bar{1}} \end{vmatrix}(t,\bar{t})} =$$

$$= \frac{\pi^n \, (-\varphi_E(t)\,)^{n+3}}{(n+1)!\,\varkappa\,|(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\bar{t}_j - 1)(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}t_i\bar{t}_1 - a_{11}\varphi_E(t)|} \qquad (9)$$

$$\frac{K_{1\bar{0}}(t;\bar{t})}{K_{G_E}(t;\bar{t})} = - \frac{(n+1)(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\bar{t}_j - 1)}{\varphi_E(t)} \qquad (1o)$$

Aus diesen Beziehungen lässt sich das Randverhalten in $z_o = 0 \in \partial G_E$ für die benötigten Grössen ohne weiteres ausrechnen. Man beachte dazu, dass für $t \in R_A(G_E;0)$ gilt:

$$\frac{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{\nu j}\bar{t}_j\right|}{|t_1 + \bar{t}_1|} \leq A \frac{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{\nu j}\bar{t}_j\right|}{\|t\|} \leq A \sum_{j=1}^{n} |a_{\nu j}|$$

$$\text{für } \nu = 1,\ldots,n \qquad (11)$$

Ebenso erhält man:

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_{i\mu}t_i\right|}{|t_1 + \bar{t}_1|} \leq A \sum_{i=1}^{n} |a_{i\mu}| \text{ für } \mu = 1,\ldots,n \qquad (12)$$

Daraus folgt:

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ R}} \frac{\varphi_E(t)}{|t_1+\bar{t}_1|} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ R}} \frac{-t_1-\bar{t}_1+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}t_i\bar{t}_j}{|t_1 + \bar{t}_1|} = -1 \qquad (13)$$

Offenbar ist die Einschränkung $t \in R$ dabei notwendig.

Geht man mit den Beziehungen (11) - (13) in (2), (7), (9),(1o) ein, so erhält man die Aussagen des

Satz 4.3: G_E sei wie in (1). Dann gilt:

a) $$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} |t_1+\bar{t}_1|^{n+1}\, K_{G_E}(t;\bar{t}) = \frac{n!\,\varkappa(\varphi_E)}{\pi^n} =$$

$$=: [A_0(\varphi_E)]^{-1} \qquad (14)$$

b) Für $u \in \mathbb{C}^n$ beliebig, gilt

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} |t_1+\bar{t}_1|^2\, ds^2_{G_E}(t;u) = (n+1)|u_1|^2 \qquad (15)$$

c) $$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \frac{J_{G_E}(0,1)(t)}{|t_1+\bar{t}_1|^{n+3}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \frac{K_{G_E}(t;\bar{t})}{\begin{vmatrix} K_{G_E} & K_{0\bar{1}} \\ K_{1\bar{0}} & K_{1\bar{1}} \end{vmatrix}(t;\bar{t})} \frac{1}{|t_1+\bar{t}_1|^{n+3}} =$$

$$= \frac{\pi^n}{(n+1)!\,\varkappa(\varphi_E)} =: A_1(\varphi_E) \qquad (16)$$

d) $$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} |t_1+\bar{t}_1|\, \frac{K_{1\bar{0}}(t;\bar{t})}{K_{G_E}(t;\bar{t})} = -(n+1) \qquad (17)$$

Satz 4.4: G_E sei wie in (1). Es gilt:

a) für alle $u \in \mathbb{C}^n - \{u : u_1 = 0\}$ ist

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \frac{J^!_{G_E}(t,u)}{|t_1+\bar{t}_1|^{n+3}} = \frac{\pi^n}{(n+1)!\,\varkappa(\varphi_E)|u_1|^2} =: A_M(\varphi_E) \qquad (18)$$

b) $X_0(t)$ und $X_1(t)$ seien $\mathbb{C}$ - wertige Funktionen in $R_A(G_E,0) \cap V$, wobei $V = V(0)$ eine Umgebung von 0 und $A > 2^{-1}$ seien.
$X_0(t)$ und $X_1(t)$ mögen die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R_A}} X_0(t) = 1; \quad X_1(t) = \frac{\hat{X}_1(t)}{t_1+\bar{t}_1} \quad \text{mit} \lim_{\substack{t\to 0\\ R_A}} \hat{X}_1(t) = X_1 \ .$$

Dann hat man

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R_A}} \frac{J_{G_E}(X_0(t),X_1(t))(t)}{|t_1+\bar{t}_1|^{n+1}} = \frac{\pi^n}{n!\varkappa(\mathcal{G}_E)} + \frac{\pi^n}{(n+1)!\,\varkappa(\mathcal{G}_E)}\left|(n+1)+X_1\right|^2 =$$

$$=: A_2(\mathcal{G}_E) \qquad (19)$$

Beweis: Die Beziehung (18) folgt wegen (1.12) aus (14) und (15). Zum Beweis von (19) setze man in (1.18) die Funktionen $X_0(t)$, $\frac{X_1(t)}{t_1+\bar{t}_1}$, sowie (14), (16) und (17) ein.

Bemerkung: Die hier eingeführten Abkürzungen $A_0(\mathcal{G}_E)$, $A_1(\mathcal{G}_E)$, $A_2(\mathcal{G}_E)$, $A_M(\mathcal{G}_E)$ werden zur Vermeidung zu langer Formeln im folgenden häufig benutzt. Die so bezeichneten Grössen hängen offenbar stetig von den Koeffizienten der Leviform der eingesetzten Funktion $\mathcal{G}_E$ ab.

§ 5. Eine Transformationsformel für $J_B(X_0,X_1)(t)$.

Um den Randfunktionen der später betrachteten Gebiete eine geeignete Gestalt zu geben, wird es nötig sein, zu biholomorphen Bildern der Gebiete überzugehen. Das macht für die Untersuchung der Kernfunktion und der Bergmanschen Metrik keine Schwierigkeiten, da sie sich bei biholomorphen Abbildungen einfach transformieren. Ein solches einfaches Transformationsverhalten besitzen die Grössen der Gestalt $J_B(X_0,X_1)(t)$ mit $X_0 \neq 0$ bei beliebigen biholo-

morphen Abbildungen nicht. (Das scheint in [3], II übersehen worden zu sein). Für eine Teilklasse biholomorpher Abbildungen, die die zulässigen Abbildungen (vgl. dazu § 1,5)) umfasst, gilt jedoch

Satz 5.1: $B, B' \subset \mathbb{C}^n$ seien beschränkte Gebiete. $\phi : B \to B'$ mit $\zeta = \phi(z)$ sei eine biholomorphe Abbildung von B auf B' von der Gestalt:

$$\zeta_1 = f_1(z_1, \ldots, z_n), \quad z \in B$$

$$\zeta_\mu = z_\mu \qquad \mu = 2, \ldots, n$$

$X_0, X_1 \in \mathbb{C}$ und $t \in B$ mit $\tau := \phi(t)$ seien beliebig. Dann gilt:

$$J_B(X_0, X_1)(t) = J_{B'}\left(\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau) \cdot X_0, \left(\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau)\right)^2 \cdot X_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 z_1}{\partial \zeta_1^2}(\tau) \cdot X_0 \right)(\tau) \qquad (1)$$

Darin ist $\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}$ die Funktionaldeterminante von ϕ^{-1} und z_1 bez. ϕ^{-1} als Funktion von $\zeta \in B'$ aufgefasst.

Beweis: Laut § 1,2) wird durch ϕ in folgender Weise ein isometrischer Isomorphismus ϕ^* von $H(B')$ auf $H(B)$ induziert:

$$H(B') \ni \tilde{f} \xrightarrow{\phi^*} f := \tilde{f} \circ \phi \; \frac{\partial(\zeta)}{\partial(z)} \in H(B) \; .$$

Es gilt offenbar $(\phi^*)^{-1} = (\phi^{-1})^*$.
Nun sei $f \in E_B(X_0, X_1; t)$. Man setze $\tilde{f} := \phi^{-1*}(f) = f \circ \phi^{-1} \cdot \frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}$. Dann gilt für $\tau := \phi(t)$:

a) $\| \tilde{f} \|_{B'} = \| f \|_B$

b) $\tilde{f}(\tau) = \frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau) \cdot f(t) = \frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau) \cdot X_0$

c) Wenn man noch beachtet, dass ϕ^{-1} die gleiche Gestalt wie ϕ besitzt, folgt ausserdem:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \zeta_1}(\tau) = \frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau) \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\mu} \frac{\partial z_\mu}{\partial \zeta_1} + f(\tau) \cdot \frac{\partial^2 z_1}{\partial \zeta_1^2}(\tau)$$

$$= \left(\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau) \right)^2 \cdot X_1 + \frac{\partial^2 z_1}{\partial \zeta_1^2}(\tau) \cdot X_0$$

$\phi^{-1}*$ bildet also $E_B(X_0, X_1; t)$ in $E_{B'}(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1; \tau)$ mit

$$\tilde{X}_0 := \frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau) \cdot X_0 \quad \text{und} \quad \tilde{X}_1 := \left(\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau) \right)^2 \cdot X_1 + \frac{\partial^2 z_1}{\partial \zeta_1^2}(\tau) \cdot X_0 \qquad (2)$$

ab. Diese Abbildung ist sogar surjektiv. Denn $\phi^{-1}* : H(B) \to H(B')$ ist surjektiv und ist $\tilde{f} \in E_{B'}(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1; \tau)$, so gibt es offenbar X_0', $X_1' \in \mathcal{C}$, so dass $\phi^*(\tilde{f}) \in E_B(X_0', X_1'; t)$. Da die durch (2) definierte Zuordnung von $(X_0, X_1) \to (\tilde{X}_0, \tilde{X}_1)$ aber eineindeutig ist und da $\tilde{f} = \phi^{-1}* \circ \phi^*(f)$ gilt, folgt $(X_0', X_1') = (X_0, X_1)$. - Es sei $f_0 \in E_B(X_0, X_1; t)$ die Minimalfunktion, d.h. $\| f_0 \|_B^2 = J_B(X_0, X_1)(t)$. Dann ist $\tilde{f}_0 := \phi^{-1}*(f_0) \in E_{B'}(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1; \tau)$ und da $\phi^{-1}*$ isometrisch und $\phi^{-1}*(E_B(X_0, X_1; t) = E_{B'}(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1; \tau)$ ist, hat f_0 minimale Norm in $E_{B'}(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1; \tau)$. Daraus folgt die Behauptung.

Schliesslich muss noch gezeigt werden, dass bei zulässigen Abbildungen durch die Zuordnung (2) Funktionen vom im Satz 4. 4 b) behandelten Typ in Funktionen des gleichen Typs übergeführt werden. Genauer gilt:

Lemma 5.2: $B, B' \subset \mathcal{C}^n$ seien beschränkte Gebiete, ∂B sei in $z_0 \in \partial B$ streng pseudo-konvex, φ sei in $U = U(z_0)$ eine Randfunktion und das Koordinatensystem z sei bez. φ in z_0 zulässig. $\phi : \overline{B} \to \overline{B}'$ mit $\zeta = \phi(z)$ sei eine zulässige Abbildung. Ferner seien $X_0(t)$, $X_1(t)$ $\mathcal{C}$-wertige Funktionen in $B \cap V$ mit einer Umgebung $V = V(o)$. $X_0(t)$ und $X_1(t)$

mögen die folgenden Eigenschaften haben:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} X_0(t) = 1 \; ; \; X_1(t) = \frac{\hat{X}_1(t)}{t_1+\bar{t}_1} \text{ mit } \lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \hat{X}_1(t) = X_1$$

Es seien ferner $\tilde{X}_0(\tau)$, $\tilde{X}_1(\tau)$ bez. ϕ wie in (2) definiert. Dann gilt ebenfalls:

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ R}} \tilde{X}_0(\tau) = 1 \; ; \; \tilde{X}_1(\tau) = \frac{\hat{\tilde{X}}_1(\tau)}{\tau_1+\bar{\tau}_1} \text{ mit } \lim_{\substack{\tau\to 0\\ R}} \hat{\tilde{X}}_1(\tau) = X_1 \; .$$

Beweis: Da B in z_0 streng pseudo-konvex ist und das Koordinatensystem z zulässig ist, gilt in B in der Nähe von $z_0 = 0$ $t_1 + \bar{t}_1 > 0$ (ebenso in B' in der Nähe von 0 $\tau_1 + \bar{\tau}_1 > 0$). Da ϕ zulässig ist, lässt ϕ lt. Satz 1.1 die Annäherungsart invariant und es ist $\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(0) = 1$. Daraus folgt lt. (2):

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ R}} \tilde{X}_0(\tau) = \lim_{\substack{t\to 0\\ R}} X_0(t) = 1$$

Ausserdem ist in der Nähe von 0 in B'

$$\tilde{X}_1(\tau) = \left(\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau)\right)^2 \frac{\hat{X}_1(t)}{t_1+\bar{t}_1} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial \zeta_1^2}(\tau)\cdot X_0(t) =$$

$$= \frac{\frac{\tau_1+\bar{\tau}_1}{t_1+\bar{t}_1}\left(\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau)\right)^2 \hat{X}_1(t) + (\tau_1+\bar{\tau}_1)\frac{\partial^2 z_1}{\partial \zeta_1^2}(\tau)\cdot X_0(t)}{\tau_1+\bar{\tau}_1}$$

Man setze also

$$\hat{\tilde{X}}_1(\tau) := \frac{\tau_1+\bar{\tau}_1}{t_1+\bar{t}_1}\left(\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau)\right)^2 \cdot \hat{X}_1(t) + (\tau_1+\bar{\tau}_1)\frac{\partial^2 z_1}{\partial \zeta_1^2}(\tau)\cdot X_0(t) \; .$$

Dann erhält man wegen Satz 1.1:

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ R}} \hat{\tilde{X}}_1(\tau) = \lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \hat{X}_1(t) = X_1 \; .$$

Damit ist Lemma 5.2 bewiesen.

§ 6. Lokale obere Abschätzungen

Es werden hier zunächst "sehr kleine" Gebiete mit einem streng pseudo-konvexen Randpunkt betrachtet und obere Abschätzungen für das Randverhalten der untersuchten Grössen gegeben. Der betreffende Satz lautet:

Satz 6.1: $\varphi(z)$ sei eine streng plurisubharmonische C^2- Funktion in einer Umgebung $U = U(0)$ mit $\varphi(0) = 0$ und $d\varphi(0) \neq 0$. Das Koordinatensystem z sei bez. φ in 0 zulässig. Wenn dann zu vorgegebenem $\varepsilon_1 > 0$, das kleiner als der kleinste Eigenwert von $(\varphi_{i\bar{j}}(0))_1^n$ ist, $V = V(0) \subset U$ eine genügend kleine Umgebung von 0 ist, gilt für

$$G_1 := \{z \in V : \varphi(z) < 0\}$$

a) $$\overline{\lim_{\substack{t\to 0\\ R}}} \frac{1}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1} K_{G_1}(t;\bar{t})} \leq A_0(\varphi - \varepsilon_1 \|z\|^2) \qquad (1)$$

b) Wenn $u \in \mathbb{C}^n - \{u : u_1 = 0\}$ ist, folgt

$$\overline{\lim_{\substack{t\to 0\\ R}}} \frac{J'_{G_1}(t,u)}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+3}} \leq A_M(\varphi - \varepsilon_1 \|z\|^2) \qquad (2)$$

c) $$\overline{\lim_{\substack{t\to 0\\ R}}} \frac{J_{G_1}(0,1)(t)}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+3}} \leq A_1(\varphi - \varepsilon_1 \|z\|^2) \qquad (3)$$

d) $X_0(t)$, $X_1(t)$ seien $\mathbb{C}$-wertige Funktionen in $G_1 \cap \tilde{V}$ mit einer Umgebung $\tilde{V} = \tilde{V}(0)$ und es gelte:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} X_0(t) = 1; X_1(t) = \frac{\hat{X}_1(t)}{t_1+\bar{t}_1} \text{ mit } \lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \hat{X}_1(t) = X_1$$

Dann hat man:

$$\overline{\lim_{\substack{t\to 0\\ R}}} \frac{J_{G_1}(X_0(t),X_1(t)(t)}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1}} \leq A_2(\varphi - \varepsilon_1 \cdot \|z\|^2) \qquad (4)$$

Beweis: Man betrachte die holomorphe Abbildung ϕ von $\mathbb{C}^n(z)$ in $\mathbb{C}^n(\zeta)$, die durch

$$\zeta_1 = z_1 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij}(o)\, z_i z_j$$

$$\zeta_\mu = z_\mu \quad \text{für } \mu = 2,\dots,n$$

gegeben ist. Da dafür $\frac{\partial(\zeta)}{\partial(z)}(o) = 1$ ist, gibt es eine Umgebung $V_1 = V_1(0)$, so dass $\phi|V_1$ biholomorph und also auch zulässig ist. $\phi|V_1$ wird weiter mit ϕ bezeichnet. Es sei $\tilde{V}_1 := \phi(V_1)$ und man setze $\psi_1(\zeta) := \psi \circ \phi^{-1}(\zeta)$ für $\zeta \in \tilde{V}_1$. Dann gilt in $\tilde{V}_1$:

$$\psi_1(\zeta) := -\zeta_1 - \overline{\zeta_1} + \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij}(o)\, \zeta_i\, \overline{\zeta_j} + \tilde{\psi}_1(\zeta) \qquad (1)$$

mit $\tilde{\psi}_1(\zeta) = o(\|\zeta\|^2)$.

Nun sei $\varepsilon_1 > 0$ beliebig, aber kleiner als der kleinste Eigenwert von $(\psi_{i\bar{j}}(o))_1^n$ vorgegeben. Die Funktion

$$\psi_{1\varepsilon_1}(\zeta) := -\zeta_1 - \overline{\zeta_1} + \sum_{i,j=1}^{n} (\psi_{i\bar{j}}(o) - \varepsilon_1 \delta_{ij})\, \zeta_i\, \overline{\zeta_j}$$

definiert dann lt. Definition 4.1 ein analytisches Ellipsoid

$$G_{1\varepsilon_1} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \psi_{1\varepsilon_1}(\zeta) < o\} \qquad (2)$$

und wenn die Umgebung $V_2 = V_2(o) \subset \tilde{V}_1$ nur genügend klein ist, gilt wegen $\tilde{\psi}_1(\zeta) = o(\|\zeta\|^2)$ für alle $\zeta \in V_2$ $\psi_{1\varepsilon_1}(\zeta) \leq \psi_1(\zeta)$. Daraus folgt für

$$G_2 := \{\zeta \in V_2 : \psi_1(\zeta) < o\} \qquad (3)$$

$$G_2 \subset G_{1\varepsilon_1} \qquad (4)$$

Nun definiere man noch

$$V := \phi^{-1}(V_2) \quad \text{und} \quad G_1 := \phi^{-1}(G_2) \tag{5}$$

Dann hat man offenbar

$$G_1 = \{ z \in V : \Psi(z) < 0 \} \tag{6}$$

Wegen der besonderen Gestalt von $\Psi_{1\varepsilon_1}$ und Ψ_1 gibt es zu jedem $A > \bar{2}^1$ eine Umgebung $U_A = U_A(0)$, so dass

$$R_A(G_{1\varepsilon_1};0) \cap U_A = R_A(G_2;0) \cap U_A \tag{7}$$

Die dazu nötige einfache Rechnung braucht hier nicht durchgeführt zu werden.

Nun seien $X_0(t)$, $X_1(t)$ Funktionen mit den in d) genannten Eigenschaften. Bezüglich der zulässigen Abbildung $\phi : G_1 \to G_2$ seien die Funktionen $\tilde{X}_0(\tau)$, $\tilde{X}_1(\tau)$ wie in (5.2) definiert in $G_2 \cap \phi(\tilde{V})$. Laut Lemma 5.2 gilt dann

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ R(G_2;0)}} \tilde{X}_0(\tau) = 1 \text{ und } \tilde{X}_1(\tau) = \frac{\hat{\tilde{X}}_1(\tau)}{\tau_1 + \overline{\tau_1}} \text{ mit } \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ R(G_2;0)}} \hat{\tilde{X}}_1(\tau) = X_1$$

und wegen (7) darf in beiden Fällen sogar $\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ R(G_{1\varepsilon_1};0)}}$ geschrieben werden. Da ausserdem $G_{1\varepsilon_1}$ ein analytisches Ellipsoid ist, gelten die Sätze 4.3 und 4.4 für $G_{1\varepsilon_1}$. Man hat also:

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ R(G_{1\varepsilon_1};0)}} \frac{J_{G_{1\varepsilon_1}}(X_0(\tau), X_1(\tau))(\tau)}{(\tau_1 + \overline{\tau_1})^{n+1}} = A_2(\Psi_{1\varepsilon_1}) \tag{8}$$

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ R(G_{1\varepsilon_1};0)}} \frac{1}{(\tau_1 + \overline{\tau_1})^{n+1} K_{G_{1\varepsilon_1}}(\tau;\overline{\tau})} = A_0(\Psi_{1\varepsilon_1}) \tag{9}$$

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ R(G_{1\varepsilon_1};0)}} \frac{J_{G_{1\varepsilon_1}}(0,1)(\tau)}{(\tau_1+\overline{\tau_1})^{n+3}} = A_1(\gamma_{1\varepsilon_1}) \qquad (10)$$

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ R(G_{1\varepsilon_1};0)}} \frac{J'_{G_{1\varepsilon_1}}(\tau;u)}{(\tau_1+\overline{\tau_1})^{n+3}} = A_M(\gamma_{1\varepsilon_1}) \qquad (11)$$

Wegen (4) und der Monotonie der auftretenden Minima in Abhängigkeit vom Gebiet (vgl. § 1) ist für alle $\tau \in G_2 \cap \phi(\widetilde{V})$:

$$J_{G_2}(\widetilde{X}_0(\tau), \widetilde{X}_1(\tau))(\tau) \leq J_{G_{1\varepsilon_1}}(\widetilde{X}_0(\tau), \widetilde{X}_1(\tau))(\tau) \;;$$

$$J_{G_2}(0,1)(\tau) \leq J_{G_{1\varepsilon_1}}(0,1)(\tau)$$

$$\frac{1}{K_{G_2}(\tau;\overline{\tau})} \leq \frac{1}{K_{1\varepsilon_1}(\tau;\overline{\tau})} \;;\; J'_{G_2}(\tau;u) \leq J'_{G_{1\varepsilon_1}}(\tau;u) \qquad (11)$$

Da $\phi : G_1 \to G_2$ zulässig ist, hat man lt. Satz 5.1 und der Definition von $\widetilde{X}_0(\tau)$, $\widetilde{X}_1(\tau)$ bei $\tau = \phi(t)$:

$$J_{G_1}(X_0(t), X_1(t))(t) = J_{G_2}(\widetilde{X}_0(\tau), \widetilde{X}_1(\tau))(\tau), \qquad (12)$$

woraus unter Beachtung von (1.17) speziell folgt

$$J_{G_1}(0,1)(t) = \left|\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau)\right|^4 J_{G_2}(0,1)(\tau) \qquad (13)$$

Ausserdem gilt lt. (1.4)

$$\frac{1}{K_{G_1}(t;\overline{t})} = \frac{\left|\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau)\right|^2}{K_{G_2}(\tau;\overline{\tau})} \qquad (14)$$

und damit lt. (1.12)

$$J'_{G_1}(t,u) = \left|\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(\tau)\right|^2 J'_{G_2}(0,1)(\tau) \qquad (15)$$

Schliesslich braucht man noch, dass lt. Satz 1.1 ϕ die Annäherungsart invariant lässt. Dann erhält man unter Beachtung von

$$A_\mu(\psi_{1\varepsilon_1}) = A_\mu(\psi - \varepsilon_1 \cdot \|z\|^2),\ \mu = 0,1,2,M$$

aus den Beziehungen (8) - (15) die Behauptung des Satzes.

§ 7. Zurückführung auf lokale Probleme

Mit Hilfe des Approximationssatzes aus § 3 lässt sich nun ein Satz beweisen, der es erlaubt, das Randverhalten der untersuchten Minima in streng pseudo-konvexen Gebieten durch das Randverhalten der Grössen in "sehr kleinen" Gebieten mit einem streng pseudo-konvexen Randpunkt nach oben abzuschätzen. Zusammen mit dem Ergebnis des § 6 erhält man dann eine obere Abschätzung für den Fall streng pseudo-konvexer Gebiete. -

Die in Satz 6.1 d) betrachtete Grösse der Form $J(X_0(t), X_1(t))(t)$ kann hier nicht sofort mitbehandelt werden, da das Randverhalten von $J(0,1)$ zur Herleitung des analogen Ergebnisses für $J(X_0(t), X_1(t))(t)$ gebraucht wird.

Satz 7.1: $G \subset \mathbb{C}^n$ sei ein streng pseudo-konvexes Gebiet, $z_0 \in \partial G$. Die in einer Umgebung $U = U(\partial G)$ definierte C^2- Funktion φ sei globale Randfunktion von G, es sei $d\varphi(z_0) \neq 0$. Ferner sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber kleiner als der kleinste Eigenwert der Leviform von φ in z_0

vorgegeben. Der Polyzylinder $P \subset U$ um z_0 sei so gewählt, dass die Aussage des Theorems 3.1 gilt. Wie dort sei

$$G_1 := \{z \in P : \varphi(z) - \varepsilon \| z - z_0 \|^2 < 0\}$$

Dann gilt:

$$\overline{\lim_{\substack{t \to z_0 \\ t \in G}}} \frac{K_G^{-1}(t;\bar{t})}{K_{G_1}^{-1}(t;\bar{t})} \leq 1$$

$$\overline{\lim_{\substack{t \to z_0 \\ t \in G}}} \frac{J_G'(t;u)}{J_{G_1}'(t;u)} \leq 1, \qquad u \in \mathbb{C}^n - \{0\}$$

$$\overline{\lim_{\substack{t \to z_0 \\ t \in G}}} \frac{J_G(0,1)(t)}{J_{G_1}(0,1)(t)} \leq 1 .$$

Beweis: 1) Unter Verwendung der in § 2 konstruierten Hilfsfunktion wird zunächst das Ergebnis des Theorems 3.1 folgendermassen angepasst:

Lemma 7.2: Die Voraussetzungen seien wie in Satz 7.1. Ferner seien der Polyzylinder $P' \Subset P$ um z_0 und $0 < \eta < 1$ vorgegeben; g_0 sei die Hilfsfunktion zu G, z_0 aus Satz 2.1. Dann gibt es ein $\lambda = \lambda(\eta) \in \mathbb{N}$, ein $L_3 \in \mathbb{R}$, das nur von G und P' abhängt, und eine Umgebung $V = V(0) \subset P'$ mit der folgenden Eigenschaft:

Ist $t \in V \cap G_1$ beliebig, aber fest, und ist $f \in F = \{f \in H(G_1) : \| f \|_{G_1} \leq 1\}$ beliebig, ist ferner $\hat{f}$ die f und t in Theorem 3.1 zugeordnete Funktion aus $H(G)$, dann gilt für $\tilde{f} := g_0^\lambda \cdot \hat{f}$:

a) $\| \tilde{f} \|_G \leq 1 + \eta L_3$; b) $|g_0^\lambda(z)| \geq 1 - \eta$ für alle $z \in G \cap V$, also insbesondere $|\tilde{f}(t)| \geq (1 - \eta)|f(t)|$.

Beweis des Lemmas: Es sei $N := |g_0|_{G-P'}$. Dann ist $N < 1$. Ferner sei $L = L(\eta)$ zu G, G_1, P' und η laut Theorem 3.1 gewählt. Dann gibt es offenbar ein $\lambda = \lambda(\eta) \in \mathbb{N}$, für das $N^\lambda \cdot L(\eta) \leq \eta$ ist. λ mit dieser Eigenschaft sei im folgenden fest. Wegen $g_0(z_0) = 1$ kann man eine Umgebung $V = V(z_0) \subset P'$ so finden, dass $|g_0^\lambda(z)| \geq 1 - \eta$ für alle $z \in V \cap G$ ist. Ist nun $f \in F$ beliebig und $t \in V \cap G_1 \subset P' \cap G_1$ wie vorgegeben, dann gilt für das nach Theorem 3.1 zu f und t gefundene $\hat{f} \in H(G)$:

$$\|\hat{f}\|_G \leq L(\eta) \; ; \quad |\hat{f} - f|_{G \cap P'} \leq \eta \; ; \quad \hat{f}(t) = f(t) \; .$$

Daraus folgt für $\tilde{f} = g_0^\lambda \cdot \hat{f}$

$$\|\tilde{f}\|_G \leq \|g_0^\lambda \hat{f}\|_{G-P'} + \|g_0^\lambda \hat{f}\|_{G \cap P'} \leq$$

$$\leq N^\lambda L(\eta) + \|f\|_{G_1} + \eta V^{\frac{1}{2}}(G \cap P')$$

$$\leq \eta + 1 + \eta V^{\frac{1}{2}}(G \cap P') = 1 + \eta L_3 \; .$$

Damit ist a) bewiesen, b) folgt sofort.

2) Fortsetzung des Beweises von Satz 7.1: Es sei $P' \Subset P$ ein Polyzylinder um z_0 und $0 < \eta < 1$ beliebig vorgegeben. Dazu seien V und λ nach Lemma 7.2 bestimmt; t sei aus $V \cap G$ beliebig, aber fest.

a) Laut (1.6) und einer folgenden Bemerkung gibt es ein $f_0 \in H(G_1)$: $\|f_0\|_{G_1} = 1$ und $|f_0(t)|^2 = K_{G_1}(t;\bar{t})$.

Zu f_0 wähle man $\hat{f}_0, \tilde{f}_0$ wie oben. Man hat dann lt. (1.6)

$$K_G^{1/2}(t;\bar{t}) \geq \frac{1}{1+\eta L_3} \; |\tilde{f}(t)| \geq \frac{1-\eta}{1+\eta L_3} \; K_{G_1}^{1/2}(t;\bar{t}) \; ,$$

d.h., zu η ist ein $V = V(0)$ gefunden, so dass

$$\frac{K_G^{-\frac{1}{2}}(t;\bar{t})}{K_{G_1}^{-\frac{1}{2}}(t;\bar{t})} \leq \frac{1+\eta L_3}{1-\eta} \quad \text{für alle } t \in G \cap V$$

Da $\frac{1+\eta L_3}{1-\eta}$ gegen 1 geht, wenn $\eta \to 0$ strebt, ist damit die Behauptung für die Kernfunktion bewiesen. Die Beweise für die beiden anderen Grössen laufen analog:

b) Lt. (1.14) gibt es $f_M \in H(G_1)$: $\|f_M\|_{G_1} = 1$ und $f_M(t) = 0$, sowie $J_{G_1}^{-1}(t;u) =$

$$= \left|\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial f_M}{\partial z_\mu}(t)\, u_\mu\right|^2 .$$

Für das zugehörige $\tilde{f}_M \in H(G)$ folgt dann unter Beachtung von Theorem 3.1,2):

$\alpha)$ $\|\tilde{f}_M\|_G \le 1 + \eta L_3$; $\beta)$ $\tilde{f}_M(t) = 0$;

$\gamma)$ $$\left|\sum_{=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_M}{\partial z_\mu}(t)\, u_\mu\right| = \left|\sum_{=1}^{n} \left[f_M(t) \frac{\partial g_o^\lambda}{\partial z_\mu}(t) + g_o^\lambda(t) \frac{\partial f_M}{\partial z_\mu}(t)\right] \cdot u_\mu\right| =$$

$$= \left|\sum_{=1}^{n} \frac{\partial f_M}{\partial z_\mu}(t)\, u_\mu\right| \cdot |g_o^\lambda(t)| \ge$$

$$\ge (1-\eta) \cdot \left|\sum_{=1}^{n} \frac{\partial f_M}{\partial z_\mu}(t)\, u_\mu\right|$$

Daraus folgt:

$$(J_G'(t;u))^{-\frac{1}{2}} \ge \frac{1-\eta}{1+\eta L_3} \quad (J_{G_1}'(t;u))^{-\frac{1}{2}}$$

In $\gamma)$ wird $f_M(t) = 0$ wesentlich benutzt. In der Tat zeigt es sich bei der Behandlung von $J_G(X_o, X_1)(t)$ mit $X_o \neq 0$, dass der Beweis ohne die obige Beziehung komplizierter wird.

c) Es gibt ein $f_1 \in H(G_1)$ lt. (1.15): $\|f_1\|_{G_1} = 1$, $f_1(t) = 0$ und $J_{G_1}^{-1}(0,1)(t) = \left|\frac{\partial f}{\partial z_1}(t)\right|^2$.

Für das zugehörige $\tilde{f}_1 \in H(G)$ folgt dann:

$\alpha)$ $\|\tilde{f}_1\| \leq 1 + \eta L_3$; $\beta)$ $|\tilde{f}_1(t)| = 0$;

$\gamma)$ $\left| \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z_1}(t) \right| = \left| f_1(t) \frac{\partial g_o^\lambda}{\partial z_1}(t) + g_o^\lambda(t) \frac{\partial f}{\partial z_1}(t) \right| \geq$

$$\geq (1 - \eta) \left| \frac{\partial f}{\partial z_1}(t) \right| .$$

Daraus folgt:

$$J_G^{-\frac{1}{2}}(0,1)(t) \geq \frac{1 - \eta}{1 + \eta L_3} \cdot J_{G_1}^{-\frac{1}{2}}(0,1)(t) .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

§ 8. Das Randverhalten der Kernfunktion, der Metrik und der Grösse $J_G(0,1)(t)$ in streng pseudo-konvexen Gebieten.

Es wird zunächst mit Hilfe von Satz 7.1 eine untere Abschätzung für das Randverhalten der untersuchten Grössen $K_G^{-1}(t;\bar{t})$, $J_G^1(t;u)$, $J_G(0,1)(t)$ in einem streng pseudo-konvexen Randpunkt z_o eines im übrigen beliebigen, beschränkten Gebietes $G \subset \mathbb{C}^n$ gegeben. Die Kombination dieses Ergebnisses mit den aus den Sätzen 7.1 und 6.1 gewonnenen oberen Abschätzungen liefert dann das genaue Randverhalten für streng pseudo-konvexe Gebiete G.

Satz 8.1: $G \subset \mathbb{C}^n$ sei ein beschränktes Gebiet, das in $z_o \in \partial G$ streng pseudo-konvex sei. φ sei in der Umgebung $U = U(z_o)$ eine streng plurisubharmonische Randfunktion von $\hat{G}$; es sei $d\varphi(z_o) \neq 0$ und das Koordinatensystem sei bez. φ in z_o zulässig. Dann gilt:

a) $$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \frac{1}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1}\, K_G(t;\bar{t})} \geq A_0(\varphi)$$

b) $$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \frac{G(t,u)}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+3}} \geq A_M(\varphi)$$

Dabei ist $u \in \mathbb{C}^n - \{u : u_1 = 0\}$

c) $$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \frac{\mathcal{J}_{\hat{G}}(0,1)(t)}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+3}} \geq A_1(\varphi) \ .$$

Beweis: Die holomorphe Abbildung

$$\phi : \zeta_1 = z_1 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}(0)\, z_i z_j$$

$$\zeta_\mu = z_\mu \text{ für } \mu = 2,\dots,n \ ,$$

ist in einer genügend kleinen Umgebung $V_1 = V_1(0) \subset U$ zulässig; es sei $\tilde{V}_1 := \phi(V_1)$. Dann gilt in $\tilde{V}_1$

$$\varphi_1(\zeta) := \varphi\circ\phi^{-1}(\zeta) = -\zeta_1 - \bar{\zeta}_1 + \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{i\bar{j}}(0)\, \zeta_i \bar{\zeta}_j + \tilde{\varphi}_1(\zeta)$$

mit $\tilde{\varphi}_1(\zeta) = o(\|\zeta\|^2)$.

Sei nun $\varepsilon_2 > 0$ beliebig. In einem genügend kleinen $\tilde{V}_2 = \tilde{V}_2(0) \subset \tilde{V}_1$ hat man

$$\varphi_1(\zeta) \leq -\zeta_1 - \bar{\zeta}_1 + \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{i\bar{j}}(0)\, \zeta_i \bar{\zeta}_j + \frac{\varepsilon_2}{2}\|\zeta\|^2 =$$

$$= \varphi_2(\zeta) \qquad (1)$$

Ausserdem definiert die Funktion

$$\varphi_{1\varepsilon_2}(\zeta) := -\zeta_1 - \bar{\zeta}_1 + \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{i\bar{j}}(0)\, \zeta_i \bar{\zeta}_j +$$

$$+ \varepsilon_2\|\zeta\|^2 \qquad (2)$$

ein analytisches Ellipsoid

$$G_{1\varepsilon_2} := \{ \zeta \in \mathbb{C}^n : \varphi_{1\varepsilon_2}(\zeta) < 0 \}$$

$G_{1\varepsilon_2}$, 0, $\frac{\varepsilon_2}{2}$ erfüllen offenbar die Voraussetzungen des Theorems 3.1. Es sei also $P \subset \widetilde{V}_2$ ein Polyzylinder um 0, so dass für $G_{1\varepsilon_1}$ und

$$\widetilde{G}_1 := \{ \zeta \in P : \varphi_{1\varepsilon_2}(\zeta) - \frac{\varepsilon_2}{2} \cdot \|\zeta\|^2 < 0 \} \qquad (3)$$

Satz 7.1 gilt. Man beachte, dass man wegen (1) und (2) in P hat

$$\varphi_2(\zeta) = \varphi_{1\varepsilon_2}(\zeta) - \frac{\varepsilon_2}{2} \|\zeta\|^2 \ .$$

Setzt man also

$$G_2 := \{ \zeta \in P : \varphi_1(\zeta) < 0 \} \ ,$$

so hat man

$$\widetilde{G}_1 \subset G_2 \qquad (4)$$

Ausserdem ist

$$G_1 := \phi^{-1}(G_2) = \hat{G} \cap \phi^{-1}(P) \subset \hat{G} \qquad (5)$$

Bezüglich $\phi : G_1 \to G_2$ gelten wieder die Transformationsformeln, wie sie auch im Beweis zu Satz 6.1 benutzt wurden ((6.13) - (6.15); es ist $\frac{\partial(z)}{\partial(\zeta)}(0) = 1$.

Satz 7.1 ergibt deshalb unter Verwendung der Monotonie der Minima in Abhängigkeit vom Gebiet wegen (4) und (5)

$$1 \geq \overline{\lim_{\tau \to 0}} \frac{K^{-1}_{G_{1\varepsilon_2}}(\tau;\bar{\tau})}{K^{-1}_{\widetilde{G}_1}(\tau;\bar{\tau})} \geq \overline{\lim_{\tau \to 0}} \frac{K^{-1}_{G_{1\varepsilon_2}}(\tau;\bar{\tau})}{K^{-1}_{G_2}(\tau;\bar{\tau})} =$$

$$= \overline{\lim_{t \to 0}} \frac{K^{-1}_{G_{1\varepsilon_2}}(\phi(t);\overline{\phi(t)})}{K^{-1}_{G_1}(t;\bar{t})} \geq \overline{\lim_{t \to 0}} \frac{K^{-1}_{G_{1\varepsilon_2}}(\phi(t);\overline{\phi(t)})}{K^{-1}_{\hat{G}}(t;\bar{t})} \qquad (6)$$

Ebenso folgen die beiden Ungleichungen

$$1 \geq \overline{\lim_{t \to 0}} \frac{J^{1}_{G_1 \varepsilon_2}(\phi(t), u)}{J^{\mathcal{A}}_{\hat{G}}(t,u)} \qquad (7)$$

$$1 \geq \overline{\lim_{t \to 0}} \frac{J_{G_1 \varepsilon_2}(0,1)(\phi(t))}{J_{\hat{G}}(0,1)(t)} \qquad (8)$$

Da $\mathcal{O}$ die Annäherungsart invariant lässt und da das Koordinatensystem z bez. φ in 0 und das Koordinatensystem ζ bez. φ_1 und $\varphi_{1\varepsilon_2}$ in 0 zulässig sind, kann man (6) folgendermassen umformen, indem man dabei Satz 4.3 auf $G_{1\varepsilon_2}$ anwendet:

$$1 \geq \overline{\lim_{\substack{t \to 0 \\ R(\hat{G},0)}}} \frac{K^{-1}_{G_1 \varepsilon_2}(\phi(t), \overline{\phi(t)})}{K^{-1}_{\hat{G}}(t;\bar{t})} = \overline{\lim_{\substack{t \to 0 \\ R(\hat{G},0)}}} \frac{(t_1 + \bar{t}_1)^{n+1} K^{-1}_{G_1 \varepsilon_2}(\phi(t), \overline{\phi(t)})}{(\tau_1 + \bar{\tau}_1)^{n+1} K^{-1}_{\hat{G}}(t;\bar{t})},$$

also

$$1 \geq \overline{\lim_{\substack{t \to 0 \\ R(\hat{G},0)}}} \frac{A_0(\varphi + \varepsilon_2 \| z \|^2)}{K^{-1}_{\hat{G}}(t;\bar{t})} \Big/ (t_1 + \bar{t}_1)^{n+1}$$

Da das für alle $\varepsilon_2 > 0$ gilt, folgt die Aussage a) des Satzes. Die Ungleichungen c) und d) erhält man aus (7) bzw. (8) wörtlich genauso.

Theorem 8.2: $G \subset \mathbb{C}^n$ sei ein streng pseudo-konvexes Gebiet, $z_0 \in \partial G$. φ sei in $U = U(\partial G)$ eine globale (streng plurisubharmonische) Randfunktion von G, es gelte $d\varphi(z_0) \neq 0$. Das Koordinatensystem z sei bez. φ in z_0 zulässig (d.h.: $z_0 = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(0) = -1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z_\mu}(0) = 0$ für $\mu = 2, \ldots, n$). Dann gilt:

a) $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ R}} (t_1+\bar{t}_1)^{n+1} K_G(t;\bar{t}) = \dfrac{n!\,\det(\varphi_{i\bar{j}}(o))_2^n}{\pi^n}$

b) für $u \in \mathbb{C}^n$ beliebig

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} (t_1+\bar{t}_1)^2\, ds_G^2(t;u) = (n+1)|u_1|^2$$

c) $\lim\limits_{\substack{t\to o\\ R}} \dfrac{J_G(0,1)(t)}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+3}} = \dfrac{\pi^n}{(n+1)!\,\det(\varphi_{i\bar{j}}(o))_2^n}$

Beweis: Es werden zunächst $K_G^{-1}(t;\bar{t})$, $J_G'(t;u)$ (für $u \in \mathbb{C}^n - \{u_1 = o\}$ und $J_G(0,1)(t)$ betrachtet. Da für G, $z_o = 0$ Satz 8.1 gilt, braucht nur noch eine obere Abschätzung angegeben zu werden. Dazu sei $\varepsilon_1 > 0$ kleiner als der kleinste Eigenwert der Leviform von φ in 0. Die Funktion $\psi_{\varepsilon_1}(z) := \varphi(z) - \frac{\varepsilon_1}{2}\|z\|^2$ erfüllt dann die Voraussetzungen des Satzes 6.1 und $\frac{\varepsilon_1}{2}$ ist noch kleiner als der kleinste Eigenwert der Leviform von ψ_{ε_1} in 0. Also kann man einem so kleinen Polyzylinder P um 0 wählen, dass für G, $\frac{\varepsilon_1}{2}$, P die Aussage des Theorems 3.1 und für $\frac{\varepsilon_1}{2}$ und

$$G_1 := \{z \in P : \psi_{\varepsilon_1}(z) < 0\}$$

die Abschätzungen von Satz 6.1 gelten. Für G, G_1, $z_o = o$ gilt dann ausserdem Satz 7.1. Damit hat man:

$$\overline{\lim_{\substack{t\to 0\\ R(G;0)}}} \frac{1}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1}K_G(t;\bar{t})} \le \overline{\lim_{\substack{t\to 0\\ R(G_1;0)}}} \frac{1}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1}K_{G_1}(t;\bar{t})}$$

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{K_G^{-1}(t;\bar{t})}{K_{G_1}^{-1}(t;\bar{t})} \le \overline{\lim_{\substack{t\to 0\\ R(G_1;0)}}} \frac{1}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1}K_{G_1}(t;\bar{t})} \le$$

$$\le A_o(\varphi - \varepsilon_1\cdot\|z\|^2)$$

Da die Ungleichung zwischen dem Glied ganz links und dem ganz rechts für alle genügend kleinen $\varepsilon_1 > 0$ gilt, folgt:

$$\overline{\lim_{\substack{t\to 0\\ R(G;0)}}} \frac{1}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1}K_G(t;\bar{t})} \leq A_0(\varphi)$$

Zusammen mit Satz 8.1 und (4.14) folgt:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} (t_1+\bar{t}_1)^{n+1}K_G(t;\bar{t}) = (A_0(\varphi))^{-1} = \frac{n!\,\det(\varphi_{i\bar{j}}(0))_2^n}{\pi^n} \qquad (9)$$

Das ist die Behauptung für $K_G(t;\bar{t})$.
Auf genau die gleiche Weise erhält man offenbar

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \frac{J_G^!(t;u)}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+3}} = A_M(\varphi) = \frac{\pi^n}{(n+1)!\,\det(\varphi_{i\bar{j}}(0))_2^n |u_1|^2} \qquad (10)$$

für $u \in \mathbb{C}^n - \{u_1 = 0\}$ und

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \frac{J_G(0,1)(t)}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+3}} = A_1(\varphi) = \frac{\pi^n}{(n+1)!\,\det(\varphi_{i\bar{j}}(0))_2^n}$$

Die Gleichungen (9) und (10) liefern wegen (1,12) die Behauptung für $ds_G^2(t;u)$, wenn $u \in \mathbb{C}^n - \{u_1 = 0\}$. Eine einfache Abschätzung ergibt dann, dass die Beziehung in b) für alle $u \in \mathbb{C}^n$ gültig ist.

§ 9. Das Randverhalten von $\frac{\partial K_G}{\partial z_1}(t;\bar{t})$

Um die dem Theorem 8.2 entsprechende Aussage für das Randverhalten von $\frac{\partial K_G}{\partial z_1}(t;\bar{t})$ in streng pseudokonvexen Gebieten (zulässiges Koordinatensystem im betrachteten Randpunkt) zu gewinnen, muss das Randverhalten von $J_G(1, \frac{X_1}{t_1+\bar{t}_1})(t)$ in diesen Gebieten hergeleitet werden. Eine obere Abschätzung ist dafür in Satz 6.1 schon gegeben. Zur Gewinnung der unteren Abschätzung wird die gleiche Methode wie in den §§ 7 und 8 für die dort betrachteten Grössen verwendet. Jedoch treten zusätzliche Schwierigkeiten auf, die einen etwas abgeänderten Gedankengang erforderlich machen. Soweit die Beweise im folgenden genauso verlaufen wie die entsprechenden Beweise in den §§ 7 und 8, mögen kurze Rückverweise genügen. Die veränderten Stellen werden ausführlicher dargestellt.

Satz 9.1: Die Voraussetzungen bez, $G \subset \mathbb{C}^n$, φ, z_o, P, $G_1, \varepsilon > 0$ seien wie in Satz 7.1. Dann gibt es eine reelle Zahl $\tilde{L}(\varepsilon)$, so dass folgendes gilt:
Sind $X_o(t)$, $X_1(t)$ $\mathbb{C}$-wertige Funktionen in $G_1 \cap \tilde{V}$ mit einer Umgebung $\tilde{V} = \tilde{V}(z_o)$, die dort nirgends gleichzeitig verschwinden mögen, so hat man:

$$\overline{\lim_{\substack{t \to z_o \\ t \in G \cap \tilde{V}}}} \frac{J_G(X_o(t),X_1(t))(t)}{J_{G_1}(X_o(t),X_1(t))(t)} \leq \tilde{L}(\varepsilon)$$

Beweis: Es sei $P' \Subset P$ ein Polyzylinder um z_o mit $P' \subset \tilde{V}$. Ferner sei $0 < \eta < 1$ beliebig vorgegeben. Dazu sei $L \in \mathbb{R}$ gemäss Theorem 3.1 bestimmt (L hängt dann u.a. auch von ε ab). $t \in P' \cap G$ sei beliebig, aber fest.

Lt. § 1.4) gibt es zu t ein $f_o \in H(G_1)$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $\| f_o \|_{G_1} = 1$; b) Mit $c := J_{G_1}^{-1/2}(X_o(t),X_1(t))(t)$
gilt: $f_o(t) = c \cdot X_o(t)$, $\frac{\partial f_o}{\partial z_1}(t) = c \cdot X_1(t)$ ..

Zu f_o bestimme man gemäss Theorem 3.1 ein $\hat{f}_o \in H(G)$ mit den Eigenschaften:

α) $\| \hat{f}_o \|_G \leq L$; β) $\hat{f}_o(t) = f_o(t) = c \cdot X_o(t)$;

$$\frac{\partial \hat{f}_o}{\partial z_1}(t) = \frac{\partial f_o}{\partial z_1}(t) = c \cdot X_1(t)$$

Daraus folgt sofort

$$J_G^{-1/2}(X_o(t),X_1(t))(t) \geq \frac{1}{L} \cdot c = \frac{1}{L} \cdot J_{G_1}^{-1/2}(X_o(t), X_1(t))(t)$$

Da L unabhängig von der speziellen Wahl von $t \in P' \cap G$ ist, hat man mit $\widetilde{L}(\mathcal{E}) := L^2$ sogar

$$\frac{J_G(X_o(t),X_1(t))(t)}{J_{G_1}(X_o(t),X_1(t))(t)} \leq \widetilde{L}(\mathcal{E}) \quad \text{für alle } t \in G \cap P' .$$

Als nächstes wird das Analogon zu Satz 8.1 bewiesen. Da jedoch die Grösse $\widetilde{L}(\mathcal{E})$ in Satz 9.1 von $\mathcal{E}$ abhängt (im Gegensatz zu L = 1 in Satz 7.1), wird die Formulierung tändlicher, ohne dass sich am Beweis wesentliches ändert.

Satz 9.2: Die Voraussetzungen bezüglich $\hat{G} \subset \mathbb{C}^n$, $z_o \in \partial \hat{G}$, $\mathcal{P}$ und das Koordinatensystem z seien wie in Satz 8.1. Ferner seien $X_o(t)$, $X_1(t)$ $\mathbb{C}$-wertige Funktionen in $\hat{G} \cap \widetilde{V}$ mit einer Umgebung $\widetilde{V} = \widetilde{V}(0)$ und es gelte:

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ R}} X_o(t) = 1; \; X_1(t) = \frac{\hat{X}_1(t)}{t_1 + \tilde{t}_1} \quad \text{mit} \lim_{\substack{t \to 0 \\ R}} \hat{X}_1(t) = X_1$$

Dann gibt es zu jedem (genügend kleinen) $\varepsilon_2 > 0$ ein $\tilde{L}(\varepsilon_2) > 0$, so dass

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \frac{J_{\hat{G}}(X_0(t),X_1(t))(t)}{(t_1+\overline{t}_1)^{n+1}} \geq (\tilde{L}(\varepsilon_2))^{-1} A_2(\varphi+\varepsilon_2\|z\|^2)$$

Beweis: Es gelten die Bezeichnungen des Beweises zu Satz 8.1. Man führe den Beweis bis zur Beziehung (8.5) genauso wie dort. Man definiere die Funktionen $\tilde{X}_0(\tau)$, $\tilde{X}_1(\tau)$ in $G_2 \cap \phi(\tilde{V})$ mit Hilfe der $X_0(t)$, $X_1(t)$ durch (5.2). Dann gilt lt. Satz 5.1

$$J_{G_1}(X_0(t),X_1(t))(t) = J_{G_2}(\tilde{X}_0 \circ \phi\ (t),\ \tilde{X}_1 \circ \phi(t))(\phi(t)) \quad (1)$$

für alle $t \in G_1 \cap \tilde{V}$. Nach Lemma 5.2 ist ausserdem

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ R(G_2;0)}} \tilde{X}_0(\tau) = 1\ ;\ \tilde{X}_1(\tau) = \frac{\hat{\tilde{X}}_1(\tau)}{\tau_1+\overline{t}_1} \text{ mit } \lim_{\substack{\tau\to 0\\ R}} \hat{\tilde{X}}_1(\tau) = X_1 \quad (2)$$

(2) gilt wegen $G_2 \subset G_{1\varepsilon_2}$ und der Zulässigkeit des Koordinatensystems ζ bez. $\varphi_1(\zeta)$ und $\varphi_{1\varepsilon_2}(\zeta)$ in 0 auch in $G_{1\varepsilon_2}$.
Also ist Satz 4.4 b) auf $J_{G_{1\varepsilon_2}}(\tilde{X}_0(\tau),\ \tilde{X}_1(\tau))(\tau)$ anwendbar. Schliesslich beachte man, dass für $G_{1\varepsilon_2}$, $\tilde{G}_1$ die Beziehung des Satzes 9.1 mit einem geeigneten $\tilde{L}(\varepsilon_2)$ gilt. Daraus folgt wie (8.6)

$$\tilde{L}(\varepsilon_2) \geq \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{J_{G_{1\varepsilon_2}}(\tilde{X}_0(\tau),\ \tilde{X}_1(\tau))(\tau)}{J_{\hat{G}}(X_0(t),\ X_1(t))(t)}\ ,\ \tau = \phi(t) \quad (3)$$

und da ϕ die Annäherungsart invariant lässt und das Koordinatensystem z bzw. ζ bezüglich φ in 0 bzw. $\varphi_{1\varepsilon_2}$ in 0 zulässig ist, erhält man aus (3) und Satz 4.4

$$(\tilde{L}(\varepsilon_2))^{-1} A_2(\varphi+\varepsilon_2\|z\|^2) = (\tilde{L}(\varepsilon_2))^{-1}\ .$$

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ R}} \frac{J_{G_{1\varepsilon_2}}(\tilde{X}_0(\tau),\tilde{X}_1(\tau))(\tau)}{(\tau_1+\bar{\tau}_1)^{n+1}} \leq \lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \frac{J_{\hat{G}}(X_0(t),X_1(t))(t)}{J_{G_{1\varepsilon_2}}(\tilde{X}_0(\tau),\tilde{X}_1(\tau))(\tau)} .$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \frac{(\tau_1+\bar{\tau}_1)^{n+1}}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1}} \cdot \lim_{\substack{\tau\to 0\\ R}} \frac{J_{G_{1\varepsilon_2}}(\tilde{X}_0(\tau),\tilde{X}_1(\tau))(\tau)}{(\tau_1+\bar{\tau}_1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \frac{J_{\hat{G}}(X_0(t),X_1(t))}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1}} \qquad (4)$$

Man beachte noch, dass dabei (3) und also auch die Aussage von Satz 9.1 nur mit $\overline{\lim}_{\substack{t\to 0\\ R}}$ ... gebraucht wurde und dass $\tilde{L}(\varepsilon_2)$ eine Konstante ist wie sie in Satz 9.1 auftritt.

Unter Benutzung der bisherigen Ergebnisse kann jetzt gezeigt werden, dass die Aussage von Satz 9.1 (und also auch die von Satz 9.2) für $\tilde{L}(\varepsilon) = 1$ richtig bleibt, wenn man auf $\overline{\lim}_{\substack{t\to z_0\\ R(G;z_0)}}$ ... einschränkt.

Satz 9.3: Die Voraussetzungen seien wie in Satz 9.1. Ausserdem sei das Koordinatensystem z bzw. $\mathcal{P}$ in z_0 zulässig Dann gilt:

$$\overline{\lim_{\substack{t\to 0\\ R(G;0)}}} \frac{J_G(X_0(t),X_1(t))(t)}{J_{G_1}(X_0(t),X_1(t))(t)} \leq 1 .$$

Beweis: Zunächst führe man die gleichen Betrachtungen wie im Beweis von Satz 9.1 durch. Gemäss Lemma 7.2 bestimme man dann ein $\lambda = \lambda(\eta)$ (unabhängig von $t \in P' \cap G$) und ein $V = V(0) \subset P'$. Dann hat man für $\tilde{f}_0 := g_0^{\lambda} \hat{f}_0$

a) $\| \tilde{f}_o \|_G \leq 1 + \eta L_3$;

b) $\tilde{f}_o(t) = g_o^\lambda(t) \cdot \hat{f}_o(t) = g_o^\lambda(t) \cdot c \cdot X_o(t)$

c) $\frac{\partial \tilde{f}_o}{\partial z_1}(t) = g_o^\lambda(t) \frac{\partial \hat{f}_o}{\partial z_1}(t) + \hat{f}_o(t) \frac{\partial g_o^\lambda}{\partial z_1}(t) =$

$$= g_o^\lambda(t) \cdot c \cdot X_1(t) + J_{G_1}^{-\frac{1}{2}}(X_o(t), X_1(t))(t) \cdot$$

$$\cdot X_o(t) \frac{\partial g_o^\lambda}{\partial z_1}(t)$$

Da $J_{G_1}^{-1/2}(X_o(t), X_1(t))(t)$ bei Annäherung von t an z_o mit der Ordnung $\frac{n+1}{2}$ gegen ∞ gehen kann, stört der zweite Summand erheblich (vgl. Satz 6.1). Zur Beseitigung dieser Schwierigkeit sei $f_1 \in H(G)$ zu t so gewählt, dass gilt:

$f_1(t) = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(t) = 1$, $J_G(0,1)(t) = \| f_1 \|_G^2$. Dann definiere man

$$\tilde{\tilde{f}} := \tilde{f}_o - X_o(t) \cdot \frac{\partial g_o^\lambda}{\partial z_1}(t) \cdot J_{G_1}^{-1/2}(X_o(t), X_1(t))(t) \cdot f_1 \in H(G) \tag{5}$$

Man hat dann

$$\tilde{\tilde{f}}(t) = \tilde{f}_o(t) = g_o^\lambda(t) \cdot c \cdot X_o(t) \; ; \; \frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial z_1}(t) = g_o^\lambda(t) \cdot c \cdot X_1(t)$$

$$\| \tilde{\tilde{f}} \|_G \leq \| \tilde{f}_o \|_G + | X_o(t) \frac{\partial g_o^\lambda}{\partial z_1}(t) | \cdot \frac{J_G^{1/2}(0,1)(t)}{J_{G_1}^{1/2}(X_o(t), X_1(t))(t)} \tag{6}$$

G_1 erfüllt die Voraussetzungen aus Satz 9.2. Es sei $\varepsilon_2 > 0$ beliebig und $\tilde{L}(\varepsilon_2) > 0$ wie in Satz 9.2. Da für G ausserdem Theorem 8.2 c) gilt, ergibt sich:

$$\overline{\lim_{\substack{t \to 0 \\ R(G;0)}}} \frac{J_G(0,1)(t)}{J_{G_1}(X_o(t), X_1(t))(t)} \leq \lim_{\substack{t \to 0 \\ R}} \frac{J_G(0,1)(t)}{(t_1 + \bar{t}_1)^{n+3}} \; .$$

$$\overline{\lim_{\substack{t\to 0\\ R}}} \frac{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1}}{J_{G_1}(X_0(t),\, X_1(t))(t)} \cdot \lim_{t\to 0} (t_1+\bar{t}_1)^2 = 0 \qquad (7)$$

Wegen der Beschränktheit von $X_0(t)\cdot \frac{\partial g_0^\lambda}{\partial z_1}(t)$ in jedem Kegel $R(G;0)$ gibt es also lt. (6) zu jedem $A > \bar{2}^1$ ein $\hat{V} = \hat{V}(0) \subset V$, so dass

$$|X_0(t)\cdot \frac{\partial g_0^\lambda}{\partial z_1}(t)| \cdot \frac{J_G^{1/2}(0,1)(t)}{J_{G_1}^{1/2}(X_0(t),X_1(t))(t)} \leq \eta$$

für alle $t \in \hat{V} \cap R_A(G,0)$. Nehmen wir nun an, das früher beliebig $P' \cap G$ gewählte t sei sogar aus $\hat{V} \cap R_A(G;0)$ gewählt, so gilt lt. (6) und a)

$$\|\tilde{\tilde{f}}\|_G \leq 1 + \eta(L_3 + 1)$$

und man hat weiter

$$J_G^{-1/2}(X_0(t),X_1(t))(t) \geq \frac{1}{1+\eta(L_3+1)} |g_0^\lambda(t)| \cdot c \geq$$

$$\geq \frac{1-\eta}{1+\eta(L_3+1)} \cdot J_{G_1}^{-1/2}(X_0(t),X_1(t))(t) .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nach einer Bemerkung am Schluss des Beweises von Satz 9.2 ist damit auch bewiesen

Korollar 9.4: Die Voraussetzungen seien die gleichen wie in Satz 9.2. Dann gilt:

$$\overline{\lim_{\substack{t\to 0\\ R}}} \frac{J_{\hat{G}}(X_0(t),X_1(t))(t)}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1}} \geq A_2 \quad (\varphi)$$

Theorem 9.5: $G \subset \mathbb{C}^n$ sei ein streng pseudo-konvexes Gebiet, $z_0 \in \partial G$. φ sei in $U = U(\partial G)$ eine globale (streng plurisubharmonische) Randfunktion von G, es gelte $d\varphi(z_0) \neq 0$. Das Koordinatensystem z sei bez. φ in z_0 zulässig. Dann gilt:

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ R}} (t_1+\bar{t}_1)^{n+2} \frac{\partial K_G}{\partial z_1}(t;\bar{t}) = -\frac{(n+1)!\,\det(\varphi_{i\bar{j}}(o))_2^n}{\pi^n}$$

Beweis: $\widetilde{V} = \widetilde{V}(0)$ sei eine Umgebung von 0. Es seien $X_0(t)$ und $X_1(t)$ $\mathbb{C}$-wertige Funktionen in $\{t \in \widetilde{V} : t_1+\bar{t}_1 > o\} = \widetilde{G}$, die nicht gleichzeitig verschwinden mögen. Es möge gelten:

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ R(\widetilde{G};0)}} X_0(t) = 1 \text{ und } X_1(t) = \frac{\hat{X}_1(t)}{t_1+\bar{t}_1} \text{ mit } \lim_{\substack{t \to 0 \\ R(\widetilde{G};0)}} \hat{X}_1(t) = X_1$$

Dann zeigt man zunächst mit Hilfe von Satz 6.1 d), Korollar 9.4 und Satz 9.3, dass

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ R}} \frac{J_G(X_0(t),X_1(t))(t)}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1}} = A_2(\varphi) =$$

$$= \frac{\pi^n}{n!\,\varkappa(\varphi)} + \frac{\pi^n}{(n+1)!\,\varkappa(\varphi)} |(n+1)+ X_1|^2 \qquad (8)$$

(vgl. auch (4.19) und Def. 4.2).

Der Beweis dafür braucht hier nicht ausführlich aufgeschrieben zu werden, da er genauso wie der erste Teil des Beweises von Theorem 8.2 verläuft. Für den weiteren Teil des Beweises genügt es, etwa $X_0(t) \equiv 1$ und $X_1(t) \equiv \frac{X_1}{t_1+\bar{t}_1}$ zu setzen. Lt. (1.18) und (1.19) gilt die Beziehung

$$J_G(1, \frac{X_1}{t_1+\bar{t}_1})(t) = \frac{1}{K_G(t;\bar{t})} + J_G(0,1)(t) \cdot \left| - \frac{K_{1\bar{0}}(t;\bar{t})}{K_G(t;\bar{t})} + \frac{X_1}{t_1+\bar{t}_1} \right|^2$$

Indem man diese Gleichung mit $\frac{1}{(t_1+\bar{t}_1)^{n+1}}$ multipliziert und zum $\lim_{\substack{t\to 0\\ R}}$ übergeht, erhält man lt. (8) und Theorem 8.2:

$$\frac{\pi^n}{n!\,\varkappa(\varphi)} + \frac{\pi^n}{(n+1)!\,\varkappa(\varphi)} \left| (n+1) + X_1 \right|^2 =$$

$$= \frac{\pi^n}{n!\,\varkappa(\varphi)} + \frac{\pi^n}{(n+1)!\,\varkappa(\varphi)} \lim_{\substack{t\to 0\\ R}} \left| -(t_1+\bar{t}_1)\,\frac{K_{1\bar{0}}(t;\bar{t})}{K_G(t;\bar{t})} + X_1 \right|^2 \qquad (9)$$

Man setze darin speziell $X_1 = -(n+1)$. Dann folgt offenbar:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} (t_1+\bar{t}_1)\,\frac{K_{1\bar{0}}(t;\bar{t})}{K_G(t;\bar{t})} = -(n+1)$$

Daraus folgt die Behauptung mit Theorem 8.2 a).

§ 10. Anhang

Es seien noch zwei Ergebnisse mitgeteilt, die sich mit den Methoden der Arbeit gewinnen lassen. Auf eine ausführliche Darstellung der Beweise an dieser Stelle wird verzichtet.

1) In Ergänzung des Theorems 9.5 gilt:

Theorem 10.1: $G \subset \mathbb{C}^n$ sei streng pseudo-konvex, $z_0 \in \partial G$. φ sei eine globale Randfunktion von G; es sei $d\varphi(z_0) \neq 0$. Das Koordinatensystem sei bez. φ in z_0 zulässig. Dann gilt für alle $\nu = 2,\ldots,n$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ R}} (t_1+\bar{t}_1)^{n+\frac{3}{2}}\,\frac{\partial K_G(t;\bar{t})}{\partial z_\nu} = 0 \qquad (1)$$

Der Satz stellt eine verschärfte Verallgemeinerung des entsprechenden Ergebnisses von Bergman (vgl. Einleitung) dar. Anhand von Formel (4.4) erkennt man, dass in analytischen Ellipsoiden G_E

$$\overline{\lim_{\substack{t\to 0\\ R_A}}} (t_1+\bar{t}_1)^{n+1} \frac{\partial K_{G_E}(t;\bar{t})}{\partial z_\nu} \leq M(A) < \infty$$

bleibt. Die Schranke M(A) geht dabei mit A gegen ∞, Es ist dem Verfasser unbekannt, ob dieses Ergebnis in beliebigen streng pseudo-konvexen Gebieten gültig bleibt.

Ausserdem ist unbekannt, ob man den Exponenten in (1) auf $n + 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, verbessern kann. Es darf vermutet werden, dass die Aussage für solche Exponenten gültig bleibt.

Zum Beweis des Theorems 10.1 sei folgendes gesagt: $B \subset \mathbb{C}^n$ sei ein beschränktes Gebiet, $t \in B$, $X_0, X_1, X_\nu \in \mathbb{C}$ (man denke sich ν beliebig, aber fest aus $\{2,\dots,n\}$ gewählt). Man definiere:

$$E_B(X_0,X_1,X_\nu;t) := \Big\{ f \in H(B) : f(t) = X_0,\ \frac{\partial f}{\partial z_1}(t) = X_1,\ \frac{\partial f}{\partial z_\nu}(t) = X_\nu \Big\}$$

$$J_B(X_0,X_1,X_\nu)(t) := \min \Big\{ \|f\|_B^2 : f \in E_B(X_0,X_1,X_\nu;t) \Big\} .$$

Dann hat man die folgende Beziehung:

$$J_B(1,0,0)(t) = \frac{1}{K_B} + \frac{K_B}{\begin{vmatrix} K & K_{0\bar{\nu}} \\ K_{\nu\bar{0}} & K_{\nu\bar{\nu}} \end{vmatrix}} \left| \frac{K_{\nu\bar{0}}}{K} \right|^2 + \frac{\begin{vmatrix} K & K_{0\bar{\nu}} \\ K_{\nu\bar{0}} & K_{\nu\bar{\nu}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K & K_{0\bar{1}} & K_{0\bar{\nu}} \\ K_{1\bar{0}} & K_{1\bar{1}} & K_{1\bar{\nu}} \\ K_{\nu\bar{0}} & K_{\nu\bar{1}} & K_{\nu\bar{\nu}} \end{vmatrix}} \cdot \left| \frac{\begin{vmatrix} K_{1\bar{0}} & K_{1\bar{\nu}} \\ K_{\nu\bar{0}} & K_{\nu\bar{\nu}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K & K_{0\bar{\nu}} \\ K_{\nu\bar{0}} & K_{\nu\bar{\nu}} \end{vmatrix}} \right|^2$$

(alles an der Stelle (t;t)). (2)

Indem man das Randverhalten von 4 verschiedenen Typen von $J_B(X_o,X_1,X_\nu)(t)$ mit ähnlichen Methoden wie in den §§ 4-9 untersucht, gewinnt man Aussagen über das Randverhalten von (2), sowie aller auf der rechten Seite von (2) auftretender Determinanten. Daraus folgt dann (1). - Es sei noch gesagt, dass das von Bergman in [3] verwendete Minimum $J_B(X_o,X_\nu)$ nicht zum Ziel führt, da dafür auch im Spezialfall der zulässigen Abbildungen keine brauchbare Transformationsformel gilt.

2) Alle in dieser Arbeit durchgeführten Überlegungen sind ohne weiteres auf den Fall von streng pseudokonvexen, relativ kompakten Gebieten G in einer hermiteschen komplexen Mannigfaltigkeit übertragbar.

3) Kobayashi hat in [14] ein hinreichendes Kriterium dafür angegeben, dass in einem beschränkten Gebiet $B \subset \mathbb{C}^n$ die Bergmansche Metrik ds_B^2 vollständig ist. Mit Hilfe der in § 2 konstruierten Hilfsfunktion und dieses Kriteriums lässt sich zeigen:

Theorem 10.2: $G \subset \mathbb{C}^n$ sei streng pseudo-konvex. Dann ist G bezüglich der Bergmanschen Metrik dS_G^2 vollständig.

Literaturverzeichnis

[1] Aronszajn,N. Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math.Soc. 68 (1950)

[2] Bergman, St. Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. Math. Ann.86 (1922)

[3] Über die Kernfunktion und ihr Verhalten am Rande I,II. Journ.f.d.reine u. angewandte Math. 169 (1933) und 172 (1934)

[4] The behaviour of the kernel function at boundary points of the second order. Am.Journ. Math. 65 (1943)

[5] Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques. Mém. Sci.Math. 1o6 (1947)

[6] Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes. Mm.Sci.Math.1o8 (1948)

[7] Kernel functions and extended classes in the theory of functions of complex variables. Coll. sur les fonct.de plus.var., Bruxelles 1953

[8] Bourbaki,N. Espaces vectoriels topologiques 1,2. Paris 1966

[9] Diederich,K. Kernfunktion und Abbildungstheorie in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher. (unveröffentlicht)

[1o] Docquier,F.u. Grauert,H. Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 14o (196o)

[11] Grauert,H. On Levi's Problem and the imbedding of real-analytic manifolds. Ann.Math.68 (1958)

[12] Gunning,R.C.u. Rossi,H. Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall 1965

[13] Hörmander,L. L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator. Acta Math. 113 (1965)

[14] Kobayashi,S. Geometry of bounded domains. Trans.Am.Math. Soc.92 (1959)

[15] Meschkowski,H. Hilbertsche Räume mit Kernfunktion. Springer-Verlag 1962

[16] Sommer, F. u. Mehring,J. Kernfunktion und Hüllenbildung in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher. Math.Ann. 131 (1956

Lebenslauf

Am 26.1o.1938 wurde ich in Wuppertal-Elberfeld als Sohn des Geschäftsleiters Karl Diederich und seiner Ehefrau Elfriede, geb. Faller, geboren. Kurz danach zog meine Familie nach Frankfurt/Main um, wo wir bis zur Zerstörung im Sommer 1943 wohnten. Wir wurden nach Adorf in Waldeck evakuiert. Dort besuchte ich vom Herbst 1944 bis Ostern 1948 die Volksschule und von Ostern 1948 bis Ostern 1951 eine Zweigstelle des Landesgymnasiums Korbach. Dann übersiedelten wir nach Wuppertal. Ich besuchte dort das neusprachlich-humanistische Gymnasium Wuppertal-Barmen, an dem ich Ostern 1958 die Reifeprüfung ablegte.

Im Sommersemester 1958 begann ich, an der Universität Göttingen Mathematik und Physik zu studieren und bestand im Sommer 1964 die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen. In den letzten Jahren habe ich mich auf Anregung von Herrn Prof. Grauert und später auch Herrn Prof. Remmert vorwiegend mit komplexer Analysis beschäftigt.

Bönecke-Druck 3392 Clausthal-Z. 29